

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра энергетических средств и технического сервиса

ИНЖЕНЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ В EXCEL

Учебно-методическое пособие для студентов инженерного факультета,
обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 – Агроинженерия

Вологда – Молочное
2022

Составитель:

старший преподаватель кафедры энергетических средств
и технического сервиса **С.В. Гайдидей**

Рецензенты:

доцент кафедры энергетических средств и технического сервиса
Н.И. Кузнецова,
доцент кафедры технические системы в агробизнесе
А.С. Михайлов.

Инженерные расчеты в Excel: Учебно-методическое пособие / Сост.
С. В. Гайдидей. – Вологда–Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА,
2022. – 97 с.

Дано краткое изложение теории основных расчетных вопросов: определение реакций связей конструктивных элементов, оценка напряженного состояния деталей и конструктивных элементов, кинематического анализа простейших механизмов, входящих в цикл общеинженерных дисциплин: «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали машин, основы конструирования и подъемно-транспортные машины» и «Теория машин и механизмов».

Изложены основные приемы и методы работы в табличном процессоре Excel по выполнению таких расчетов.

Приведено подробное описание выполнения наиболее характерных примеров расчетов конструктивных элементов и деталей технологического оборудования в табличном процессоре Excel.

Пособие предназначены для студентов инженерного факультета, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 – Агроинженерия..

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА.

© Гайдидей С.В., 2022

© ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2022

ВВЕДЕНИЕ

Студенты инженерных направлений подготовки сельскохозяйственных вузов при изучении специальных дисциплин достаточно часто встречаются с необходимостью выполнения прочностных и конструктивных расчетов элементов конструкций сельскохозяйственных машин, орудий и различного технологического оборудования.

Теоретические основы и практические навыки выполнения таких расчетов студенты инженерных специальностей сельскохозяйственных вузов получают при изучении дисциплин цикла технической механики.

В большинстве случаев прочностные расчеты элементов конструкций сельхозмашин, орудий и технологического оборудования связаны с выполнением большого перечня расчетов, как правило, трудоемких и многовариантных.

К таким вопросам, в частности, относятся:

- определение реакций связей (опорных реакций) в дисциплинах *Теоретическая механика, Сопротивление материалов, Детали машин, основы конструирования и подъемно-транспортные машины;*

- определение положения центра тяжести (центра масс), в особенности для плоских сечений сложной конфигурации, и геометрических характеристик таких сечений в дисциплинах *Теоретическая механика и Сопротивление материалов;*

- определение внутренних силовых факторов в сечениях элементов конструкций конструкции при воздействии на эти элементы внешних силовых факторов в дисциплинах *Сопротивление материалов и Детали машин, основы конструирования и подъемно-транспортные машины;*

- кинематический анализ плоских механизмов (определение перемещений, скоростей и ускорений точек звеньев механизма) в дисциплине *Теория машин и механизмов.*

В большинстве случаев для выполнения расчетов по указанным дисциплинам целесообразно использовать возможности табличного процессора *Excel*.

В пособии предлагается методика выполнения основных расчетов, вызывающих затруднения у студентов, по вышеперечисленным дисциплинам.

Чтобы не возникало затруднений при расчетах в *Excel*, предварительно напоминаются основные понятия, встречающиеся при работе с табличным процессором.

1. . ТАБЛИЧНЫЙ ПРОЦЕССОР EXCEL В РАСЧЕТАХ

После запуска табличного процессора *Excel* на экране дисплея отображается окно приложения, содержащее все необходимые средства для работы с новой открытой книгой (рис. 1).

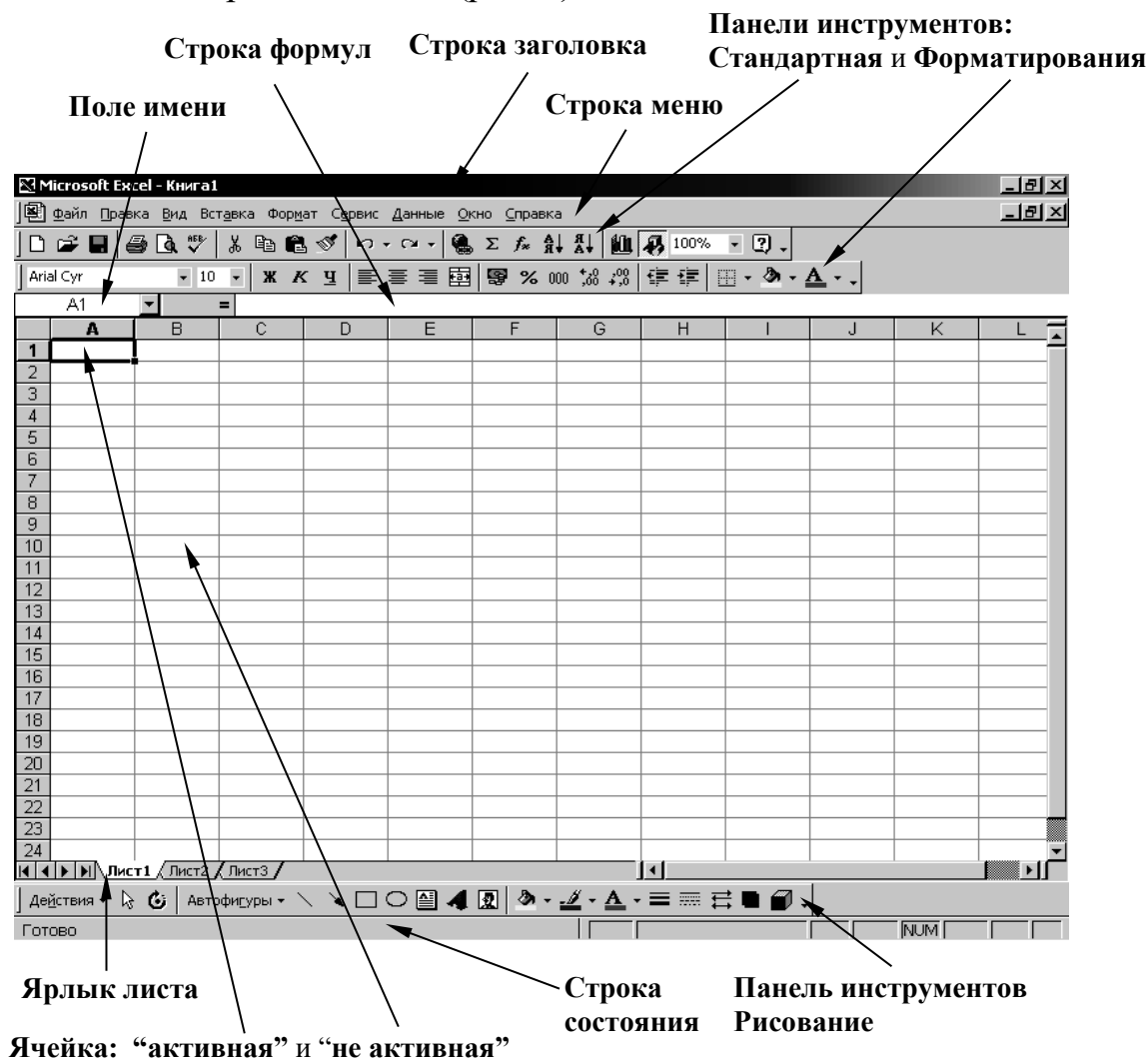


Рис. 1. Общая структура и элементы окна приложения *Excel*

Строка заголовка содержит название активной книги и кнопки управления состоянием окна приложения *Excel*: закрытие, восстановление и свертывание окна.

Строка меню представляет собой горизонтальное меню, в котором собраны элементы меню, объединяющие по функциональному назначению команды приложения *Excel*.

Панель инструментов включает в себя кнопки (пиктограммы) основных, наиболее часто встречающихся команд приложения *Excel*, объединенных по какому-либо определяющему признаку. Используемое при подготовке документа количество одновременно открытых панелей инструментов может достигать до 10 – 14, однако при этом резко

уменьшается размер рабочего поля. Поэтому, как правило, в большинстве случаев достаточно иметь открытыми (активными) **панели инструментов Стандартная и Форматирования**.

Поле имени представляет собой числовое **текстовое поле**, в котором отражается **адрес активной** (выделенной) в данный момент **ячейки**. **Ячейкой** является часть **Рабочего поля** окна **приложения Excel**, находящаяся на пересечении **столбцов** головки и **строк** боковика **Рабочего поля** окна **приложения Excel**. **Столбцы** обозначаются буквами латинского алфавита, а **строки** – арабскими цифрами. **Адресом ячейки** является сокращенной обозначение координатного расположения пространства **ячейки**, включающее латинскую букву (обозначение **столбца**) и арабскую цифру (обозначение **стоки**), в общем пространстве **Рабочего поля** окна **приложения Excel**.

Ячейка по функциональному назначению данных, введенных в нее, имеет три основных вида: **метка, значение, формула**.

Меткой считается **ячейка**, содержащая текст, графическое изображение, введенные в ячейку для пояснения общего содержания и данных, обрабатываемых в данном документе. **Ячейки – метки** при вычислении игнорируются **Excel**.

Значением называется число, введенное в **ячейку**. **Значения** используются при выполнении вычислений в **Excel**, при построении графических отображений числовых данных средствами **Excel** и т.д.

Формулой является выражение, которое записано в ячейку, содержит числа, адреса ячеек, знаки арифметических действий и коды функциональных отношений (математических, логических и др.) и обеспечивает получение в ячейке числового или логического значения, соответствующего смыслу выражения.

Строка формул показывает данные, содержащиеся в **активной ячейке**, в том формате, в котором они вносятся в **ячейку (метка, значение или формула)**. Представление данных в виде **формулы** начинается с перевода **ячейки** в режим редактирования (ввода) формул нажатием левой кнопки курсора по знаку « = » в левой части **строки формул**. Затем выполняется набор выражения формулы:

— количественная величина значения вводится набором с клавиатуры, при этом рекомендуется использовать правый цифровой блок клавиатуры, включенный в режим **Num Lock**;

— ссылка на адрес ячейки осуществляется щелчком левой кнопки мыши по полю соответствующей ячейки;

— коды функциональных отношений (функции) рекомендуется вводить в выражение формулы, используя команду **Вставка функций** панели инструментов **Стандартная**; при этом открывается диалоговое окно **Мастер функций**, а на месте поля имени ячейки может появиться

дополнительный раскрывающийся список, содержащий перечень 10 последних примененных функций.

Ссылка на адрес ячейки в зависимости от характера реализации расчетов по формуле может иметь вид: *относительной, абсолютной по полному адресу ячейки, абсолютной по номеру столбца, абсолютной по номеру строки*. Иногда два последних вида ссылок называют **смешанными**. Понятие *относительной, абсолютной и смешанной* ссылки связано с возможным характером выполнения многовариантных расчетов с использованием *автозаполнения*.

Автозаполнение обеспечивает введение в связанные блоки ячеек данных, имеющих характер повторяющихся или меняющихся по строго связанным правилам:

- нумерованных данных типа – «*Пример 1*», «*Пример 2*» и т.д.; «*1897 г.*», «*1898 г.*» и т.д.;
- данных, описывающих определенные установившиеся последовательности – дни недели: «*понедельник*», «*вторник*» и т.д.; месяцы года: «*январь*», «*февраль*» и т.д.;
- данных, представляющих собой арифметические или геометрические прогрессии;
- данных, являющихся математическими выражениями (формулами) для выполнения повторяющихся расчетов.

При повторении формул в связанном блоке ячеек с использованием **автозаполнения** происходит автоматическая пошаговая смена адресной ссылки (относительные адреса), которой можно избежать, применяя фиксацию адресной ссылки (абсолютный адрес).

Автозаполнение выполняется следующим образом: активизируется первая ячейка заполняемого ряда, курсор переводится в правый нижний угол выделенной ячейки (при этом курсор примет вид «+»), затем при нажатой левой кнопке мыши курсор проводится по заполняемому блоку ячеек.

Для изменения характера адресации используется последовательное нажатие системной клавиши **F4** при курсоре, установленном на символьном обозначении адреса ячейки в формуле. При этом в зависимости от числа нажатий на системную клавишу изменяется характер отображения адреса в формуле (появляется знак доллара **\$**) и характер пошаговой смены адреса в формулах при использовании **автозаполнения**:

- при первом нажатии – полная фиксация адресной ссылки (абсолютный адрес) и отображение адреса в формуле в виде – **\$A\$11**;
- при втором нажатии – фиксация адресной ссылки по номеру строки (смешанная ссылка с закреплением номера строки) и вид адреса – **B\$23**;
- при третьем нажатии – фиксация адресной ссылки по номеру столбца (смешанная ссылка с закреплением номера столбца) и вид адреса – **\$D14**;

□ четвертое нажатие – отменяет фиксацию адресной ссылки (относительный адрес) и вид адреса **F26**.

Поле ячейки, в которое заносятся данные, может быть предварительно отформатировано: по характеру данных (вкладка **Число**); по характеру расположения данных (вкладка **Выравнивание**); по стилю, размеру и характеру используемого шрифта (вкладка **Шрифт**); по виду очертания границ ячейки (вкладка **Граница**) и др. Форматирование ячейки осуществляется с использованием диалогового окна **Формат ячейки** (рис. 2, 3), вызываемого из меню **Формат (Строка меню) ⇒ Ячейки** или из контекстного меню, вызываемого нажатием правой кнопки мыши при курсоре в активной ячейке, командой **Формат ячейки**.

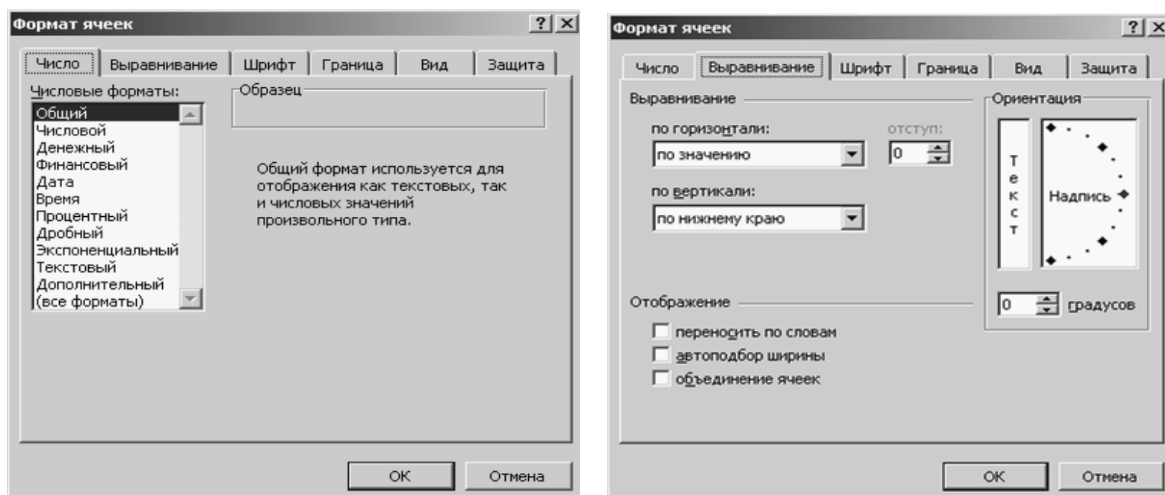


Рис. 2. Диалоговое окно **Формат ячейки** с вариантами активных вкладок **Число** и **Выравнивание**

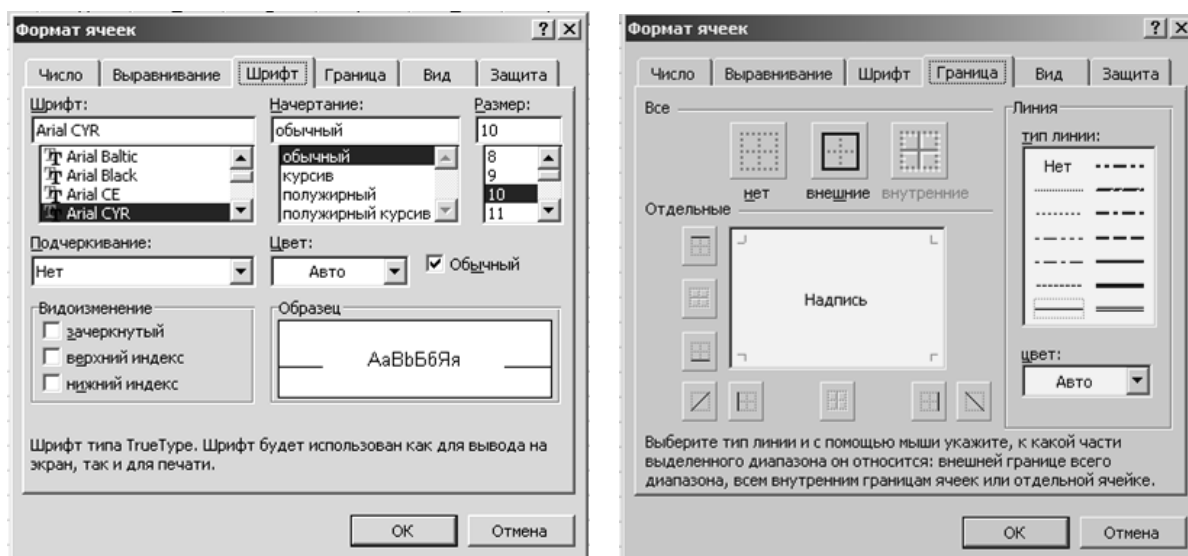


Рис. 3. Диалоговое окно **Формат ячейки** с вариантами активных вкладок **Шрифт** и **Граница**

В процессе выполнения технических документов достаточно часто необходима подготовка графических изображений результатов расчетов. Для этих целей приложение *Excel* располагает таким мощным инструментом, как **Мастер диаграмм** (рис. 4).

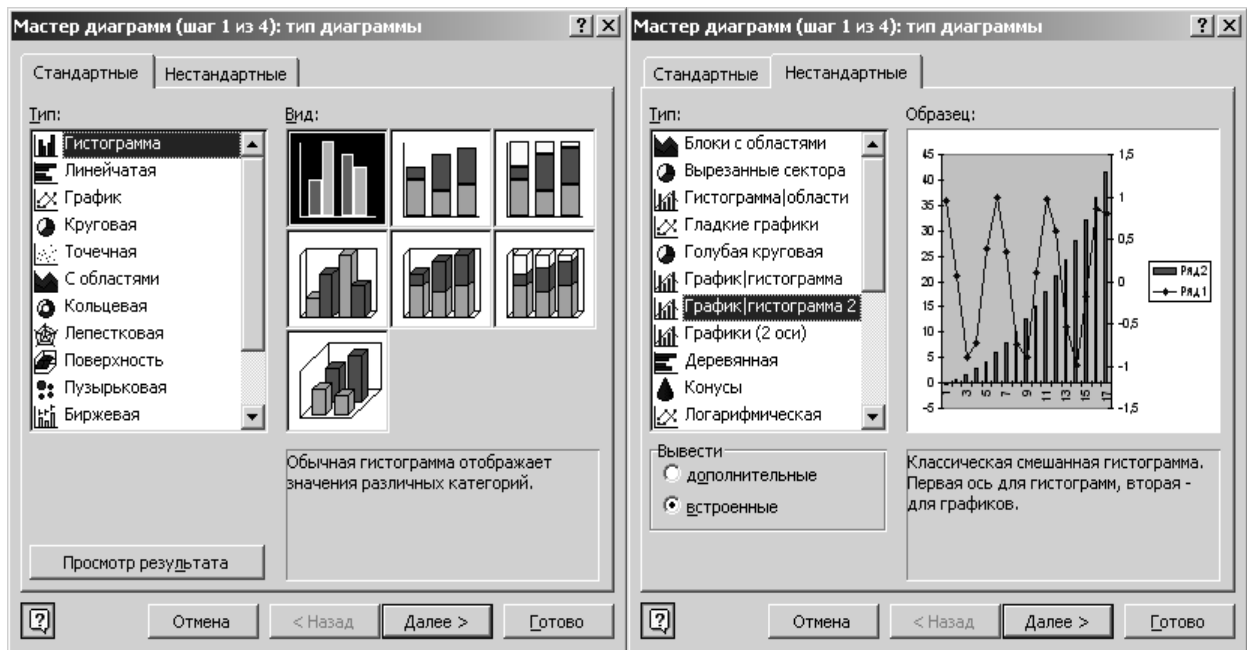


Рис. 4. Диалоговое окно **Мастер диаграмм** с вариантами **Стандартных** и **Нестандартных** графиков

2. РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Любое физическое тело, как правило, находится во взаимодействии с другими телами. Воздействие одного физического тела на другое в общем случае принято называть **силой**. В том случае, если воздействие со стороны других тел может вызывать какое-либо перемещение рассматриваемого тела, то такая сила считается **активной**. Если воздействие со стороны других тел ограничивают в какой-либо форме возможные перемещения рассматриваемого тела, то эти тела называются **связями**. Воздействие на рассматриваемое тело со стороны **тел – связей**, ограничивающее перемещение рассматриваемого тела называется **реакцией связи**.

В технике значительная доля задач относится к задачам определения реакций связей тел, находящихся в **равновесии**, при действии на них **системы сил**.

2.1. Общие положения равновесия

Под равновесием тел в статике понимается состояние его покоя по отношению к системе координат, принимаемой за неподвижную, под действием приложенной системы сил.

Совокупность активных сил, действующих на материальную точку или на «абсолютно» твердое тело, и реакций связей, налагаемых на материальную точку или «абсолютно» твердое тело, называется **системой сил**, приложенных к материальной точке или «абсолютно» твердому телу.

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется **сходящейся**. Сходящаяся система сил может быть: **плоской** – линии действия всех сил системы принадлежат одной плоскости и **пространственной** – линии действия сил системы не принадлежат одной плоскости.

Система сил, линии действия которых не могут пересечься в одной точке, называется **произвольной**. Произвольная система сил аналогично системе сходящихся сил может быть плоской и пространственной.

Если система сил такова, что под ее действием тело не меняет своего движения или, в частности, продолжает оставаться в покое, то такая система сил называется **уравновешенной**.

Основной задачей статики является рассмотрение равновесия несвободных тел. Задачи на равновесие несвободных тел решаются с учетом следующего очевидного факта, что всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить действие их на тело силами реакций этих связей. Большинство технических задач статики заключается в определении реакций связей при равновесии несвободных тел.

В зависимости от характера системы сил условия равновесия системы сил будут следующими:

□ при действии системы сходящихся сил – равенство нулю равнодействующей этой системы сил,

□ при действии системы произвольных сил – равенство нулю главного вектора и главного момента системы.

Условия равновесия описываются уравнениями равновесия в принятой системе координат:

□ для системы сходящихся сил:

• при плоской системе сил:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0,$$

• при пространственной системе сил:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0;$$

□ для произвольной системы сил:

• при плоской системе сил:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_A = 0,$$

• при пространственной системе сил:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_X = 0, \sum M_Y = 0, \sum M_Z = 0.$$

Для произвольной плоской системы сил представлен основной вид записи уравнений равновесия. В зависимости от характера связей для простоты решения возможно использование еще двух видов записи уравнений равновесия:

$$\sum X = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0 \text{ или}$$

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0.$$

2.2. Реакции связей при плоской сходящейся системе сил

Решение задач и заполнение расчетной таблицы *Excel* рекомендуется выполнять в следующем порядке:

- выбирается точка равновесие, которой рассматривается,
- связи заменяются их реакциями,
- вычерчивается силовая схема с указанием всех активных сил и реакций связей,
- назначается расчетная система координат; при решении с использованием приложения *Excel* рекомендуется назначать общепринятую декартову систему координат с началом в точке равновесия;
- подготавливается расчетная таблица в *Excel* по предлагаемой форме (табл. 1)

Таблица 1

Рекомендуемая форма расчетной таблицы определения реакций связей для плоской сходящейся системе сил

	A	B	C	D	E	F	G
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Угол силы с осью		проекция силы на ось		
2			X	Y	X	Y	
3	Первая реакция связей	найти					
4	Вторая реакция связей	найти					
5	Активная сила						
6						
7	Активная сила						
8	Сумма проекций активных сил						
9							
10	Матрица коэффициентов			Матрица первой реакции связи			Матрица второй реакции связи
11							
12							
13							
14				Величина реакции			Величина реакции
15							

□ в графу **B** расчетной таблицы заносятся величины модулей активных сил;

□ определяются углы между направлением координатных осей и направлением действия сил и заносятся в столбцы **C** и **D** (табл. 1);

□ с использованием **Мастера функций** определяются проекции сил на координатные оси по формулам:

для активных сил \Rightarrow *модуль силы \times COS(угол между направлениями оси и силы)*,

для реакций связей (неизвестных усилий) \Rightarrow *COS(угол между направлениями оси и силы)*;

т.е. в расчетные ячейки столбцов **E** и **F** вводятся формулы:

в ячейку **E3** \Rightarrow $=ЕСЛИ(B3="найти";COS(РАДИАНЫ(C3)));$
 $B3 * COS(РАДИАНЫ(C3))$

в ячейку **F3** \Rightarrow $=ЕСЛИ(B3="найти";COS(РАДИАНЫ(D3)));$
 $B3 * COS(РАДИАНЫ(D3))$

- для активных сил подсчитать сумму проекций их на оси;
- найти, используя метод Крамера величины неизвестных сил; для этого подсчитать величины матриц определителей, используя функцию

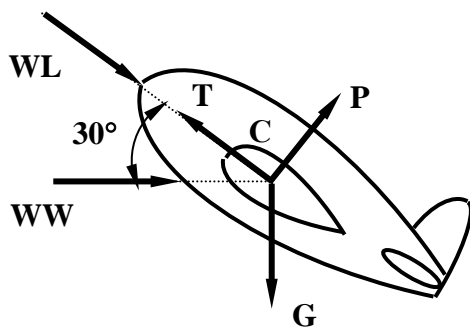
МОПРЕД (массив значений соответствующей матрицы):

определитель матрицы коэффициентов при неизвестных и определители матриц для неизвестных усилий, в которых соответствующую неизвестному усилию строку следует заменить строкой свободных членов (сумм проекций активных сил)

- определить величины неизвестных реакций связей, для этого необходимо поделить определители матриц неизвестных усилий на определитель матрицы коэффициентов при неизвестных, взятый с обратным знаком.

2.2.1. Пример расчета по определению реакций связей при плоской сходящейся системе сил

Определить величину подъемной силы **P** и силу тяги **T**, необходимые при равномерном наборе высоты самолетом сельскохозяйственной авиации под углом 30° к горизонту.



Исходные данные:

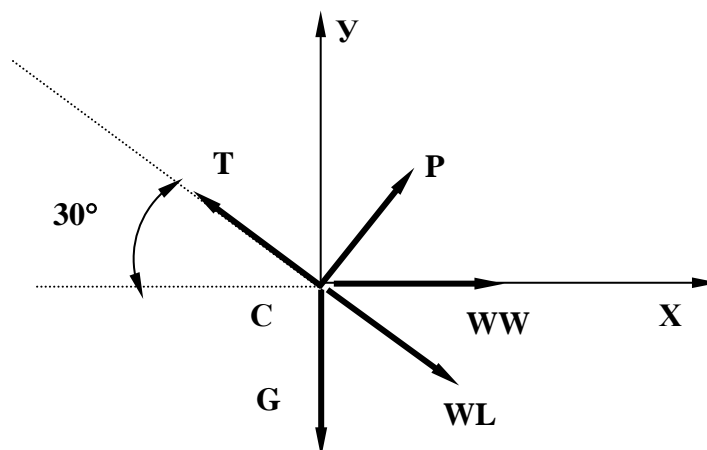
масса самолета $\Rightarrow m = 4,6 \text{ Т}$,

сила лобового сопротивления $\Rightarrow \mathbf{WL} = 8 \text{ кН}$,

сила горизонтального сопротивления ветра $\Rightarrow \mathbf{WW} = 3 \text{ кН}$.

Решение:

За расчетную точку равновесия принимается $(\bullet) \text{ C}$, вычерчивается силовая схема и назначается расчетная система координат.



Вводятся в расчетную таблицу величины заданных сил и углы между принятым направлением координатных осей и направлением сил

	A	B	C	D	E	F	G
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Угол силы с осью		Проекция силы на ось		
2			X	Y	X	Y	
3	Сила тяги, T	найти	150	60			
4	Подъемная сила, P	найти	60	30			
5	Сила тяжести самолета, G	45,08	90	180			
6	Сила лобового сопротивления воздуха, WL	8	30	120			
7	Сила ветрового сопротивления, WW	3	0	90			
8	Сумма проекций активных сил						
9							
10	Матрица коэффициентов			Матрица силы T			Матрица силы P
11							
12							
13				Сила T			Сила P

Для определения проекций сил на координатные оси в ячейки E3 и F3 вводятся расчетные формулы

E3 = ЕСЛИ(B3="найти"; COS(РАДИАНЫ(C3)); B3*COS(РАДИАНЫ(C3)))							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Угол силы с осью		Проекция силы на ось		
2			X	Y	X	Y	
3	Сила тяги, T	найти	150	60	-0,866		
4	Подъемная сила, P	найти	60	30			
5	Сила тяжести самолета, G	45,08	90	180			
6	Сила лобового сопротивления воздуха, WL	8	30	120			
7	Сила ветрового сопротивления, WW	3	0	90			
8	Сумма проекций активных сил						
9							
10	Матрица коэффициентов			Матрица силы T			Матрица силы P
11							
12							
13				Сила T			Сила P

Автозаполнением определяются проекции всех сил на координатные оси и суммы проекций активных сил на те же оси.

F8		=СУММ(F5:F7)				
	A	B	C	D	E	F
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Угол силы с осью		Проекция силы на ось	
2			X	Y	X	Y
3	Сила тяги, T	найти	150	60	-0,866	0,500
4	Подъёмная сила, P	найти	60	30	0,500	0,866
5	Сила тяжести самолета, G	45,08	90	180	0,000	-45,080
6	Сила лобового сопротивления воздуха, WL	8	30	120	6,928	-4,000
7	Сила ветрового сопротивления, WW	3	0	90	3,000	0,000
8	Сумма проекций активных сил				9,928	-49,080
9						
10	Матрица коэффициентов			Матрица силы T		Матрица силы P
11						
12						
13				Сила T		Сила P

Составляются необходимые матрицы:
 матрица коэффициентов – копированием блока ячеек (массива), включающих величины проекций неизвестных реакций связей на координатные оси,
 матрицы для реакций связей – копированием матрицы коэффициентов с заменой строки коэффициентов данной реакции связи на строку сумм проекций активных сил.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Угол силы с осью		Проекция силы на ось				
2			X	Y	X	Y			
3	Сила тяги, T	найти	150	60	-0,866	0,500			
4	Подъемная сила, P	найти	60	30	0,500	0,866			
5	Сила тяжести самолета, G	45,08	90	180	0,000	-45,080			
6	Сила лобового сопротивления воздуха, WL	8	30	120	6,928	-4,000			
7	Сила ветрового сопротивления, WW	3	0	90	3,000	0,000			
8	Сумма проекций активных сил				9,928	-49,080			
9									
10	Матрица коэффициентов	-0,866	0,500	Матрица силы T	9,928	-49,080	Матрица силы P	-0,866	0,500
11		0,500	0,866		0,500	0,866		9,928	-49,080
12									
13				Сила T			Сила P		

Определяются неизвестные силы (показана формула для определения величины подъемной силы P)

H13		= -МОПРЕД(H10:I11)/МОПРЕД(B10:C11)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Угол силы с осью		Проекция силы на ось				
2			X	Y	X	Y			
3	Сила тяги, T	найти	150	60	-0,866	0,500			
4	Подъемная сила, P	найти	60	30	0,500	0,866			
5	Сила тяжести самолета, G	45,08	90	180	0,000	-45,080			
6	Сила лобового сопротивления воздуха, WL	8	30	120	6,928	-4,000			
7	Сила ветрового сопротивления, WW	3	0	90	3,000	0,000			
8	Сумма проекций активных сил				9,928	-49,080			
9									
10	Матрица коэффициентов	-0,866	0,500	Матрица силы T	9,928	-49,080	Матрица силы P	-0,866	
11		0,500	0,866		0,500	0,866		9,928	
12									
13				Сила T	33,138		Сила P	37,540	

2.3. Реакции связей для пространственной системы сходящихся сил

Для пространственной системы сходящихся сил необходимо знать как углы расположения сил относительно координатных плоскостей, так и углы расположения проекции силы в координатной плоскости относительно осей

координат. Поэтому общий порядок решения совпадает с предложенным в пункте 2.2, однако несколько изменяется рекомендуемая форма расчетной таблицы, а значит и характер используемых формул. В общем случае расчетная таблица имеет сложную форму и большой объем.

В большинстве конкретных задач можно привести решение для случая одной расчетной координатной плоскости, поэтому форма расчетной таблицы значительно упрощается, а ее объем уменьшается. В этих случаях положение сил в пространстве однозначно может определяться углом с осью, перпендикулярной к расчетной координатной плоскости, и углами положения проекции этой силы на координатной плоскости с осями, составляющими эту плоскость. Рекомендуемая форма расчетной представлена для таких расчетов в табл. 2.

В случае, когда задаются размеры элементов рассчитываемой конструкции или координаты положения узлов ее, необходимо выполнить расчеты по определению углов положения усилий в принятой системе координат в дополнительной таблице.

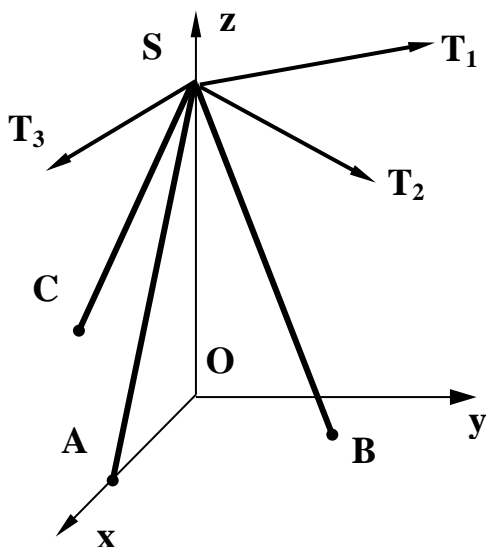
Таблица 2

Рекомендуемая форма расчетной таблицы определения реакций связей при пространственной сходящейся системе сил

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	Действующие силы	Модуль силы	Расчетная плоскость координат		Проекция силы на ось								
2			Расчетные углы										
3			Угол с осью, перпендикулярной расчетной плоскости	Углы с осями в расчетной плоскости координат		Ось	Ось	Ось					
4				С осью	С осью								
5	Первая реакция связей	найти											
6	Вторая реакция связей	найти											
7	Третья реакция связей	найти											
8	Активная сила												
9												
10	Активная сила												
11	Сумма проекций активных сил												
12	Матрица коэффициентов		Матрица первой реакции			Матрица второй реакции			Матрица третьей реакции				
13													
14													
15													
16													
17				Первая реакция		Вторая реакция		Третья реакция					

2.3.1. Пример расчета по определению реакций связей при пространственной сходящейся системе сил

Определить усилия в стойках угловой опоры линии электропередачи, подводящей электроэнергию к зданию молочной фермы.



Исходные данные:

величина натяжения проводов:

$T_1 = 6$ кН, $T_2 = 10$ кН, $T_3 = 8$ кН;

углы стоек опоры с вертикальной осью:

$\angle ASO = 30^\circ$, $\angle BSO = 30^\circ$, $\angle CSO = 45^\circ$;

углы положения проводов линии электропередачи относительно вертикальной оси:

$\angle T_1SO = 80^\circ$, $\angle T_2SO = 85^\circ$, $\angle T_3SO = 75^\circ$;

углы положения проекций элементов опоры на горизонтальную плоскость:

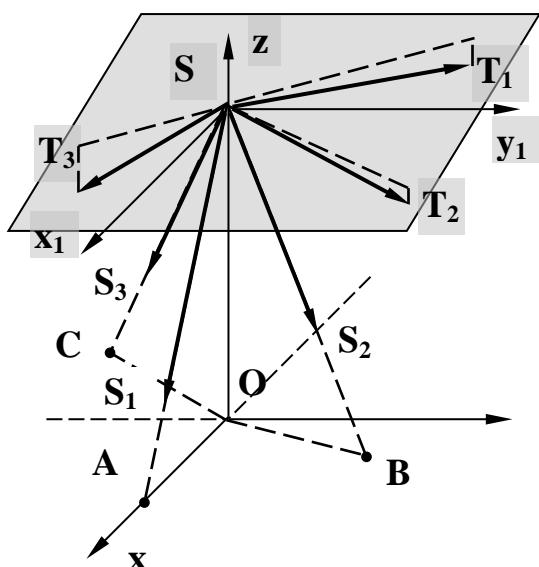
$\angle AOx = 0^\circ$, $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 140^\circ$;

углы положения проекций проводов на горизонтальную плоскость:

$\angle T_{1(xOy)}Oy = 15^\circ$, $\angle T_{1(xOy)}OT_{2(xOy)} = 110^\circ$,
 $\angle T_{3(xOy)}OT_{2(xOy)} = 60^\circ$.

Решение:

За расчетную точку равновесия принимается $(\bullet) S$, вычерчивается силовая схема и назначается расчетная система координат.



Введем в расчетную таблицу величины заданных сил и углы между принятым направлением координатных осей и направлением сил.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Расчетная плоскость координат xOy			Проекция силы на ось						
2			Расчетные углы, градусы									
3			Угол с осью Oz, перпендикулярной расчетной плоскости	Углы с осями в расчетной плоскости координат		Ось Ox	Ось Oy	Ось Oz				
				С осью Ox	С осью Oy							
4												
5	S ₁	найти	150	0	90							
6	S ₂	найти	150	80	10							
7	S ₃	найти	135	140	130							
8	T ₁	6	100	105	15							
9	T ₂	10	95	5	95							
10	T ₃	8	105	65	155							
11	Сумма проекций активных сил											
12	Матрица коэффициентов			Матрица реакции S1			Матрица реакции S2			Матрица реакции S3		
13												
14												
15												
16												
17				реакция S ₁			реакция S ₂			реакция S ₃		

Для определения проекций сил на координатные оси в ячейки **F5**, **G5** и **H5** вводятся расчетные формулы.

Автозаполнением определяются проекции всех сил на координатные оси и суммы проекций активных сил на те же оси.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Расчетная плоскость координат xOy			Проекция силы на ось						
2			Расчетные углы, градусы									
3			Угол с осью Oz, перпендикулярной расчетной плоскости	Углы с осями в расчетной плоскости координат		Ось Ox	Ось Oy	Ось Oz				
				С осью Ox	С осью Oy							
4												
5	S ₁	найти	150	0	90	-0,866025	-5,31E-17					
6	S ₂	найти	150	80	10	-0,150384						
7	S ₃	найти	135	140	130	0,5416752						
8	T ₁	6	100	105	15	0,2696607						
9	T ₂	10	95	5	95	-0,868241						
10	T ₃	8	105	65	155	-0,875053						
11	Сумма проекций активных сил					-1,473633						
12	Матрица коэффициентов			Матрица реакции S1			Матрица реакции S2			Матрица реакции S3		
13												
14												
15												
16												
17				реакция S ₁			реакция S ₂			реакция S ₃		

H5		=ЕСЛИ(B5="найти";COS(РАДИАНЫ(C5));B5*COS(РАДИАНЫ(C5)))										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Расчетная плоскость координат xOy			Проекция силы на ось						
2			Расчетные углы, градусы									
3			Угол с осью Oz, перпендикулярной расчетной плоскости	Углы с осями в расчетной плоскости координат		Ось Ox	Ось Oy	Ось Oz				
4				С осью Ox	С осью Oy							
5	S ₁	найти	150	0	90	-0,866025	-5,31E-17	-0,866025				
6	S ₂	найти	150	80	10	-0,150384	-0,852869					
7	S ₃	найти	135	140	130	0,5416752	0,4545195					
8	T ₁	6	100	105	15	0,2696607	-1,006388					
9	T ₂	10	95	5	95	-0,868241	0,0759612					
10	T ₃	8	105	65	155	-0,875053	1,8765577					
11	Сумма проекций активных сил					-1,473633	0,9461314					
12	Матрица коэффициентов			Матрица реакции S1			Матрица реакции S2			Матрица реакции S3		
13												
14												
15												
16												
17						реакция S ₁		реакция S ₂			реакция S ₃	

Составляются необходимые матрицы:

матрица коэффициентов – копированием блока ячеек (массива), включающих величины проекций неизвестных реакций связей на координатные оси,

матрицы для реакций связей – копированием матрицы коэффициентов с заменой строки коэффициентов данной реакции связи на строку сумм проекций активных сил.

Определяются неизвестные силы (показана формула для определения величины усилия в подкосе SC)

L17		=-МОП _{Курсив} (4:L16)/МОПРЕД(A14:C16)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Действующие силы	Модуль силы, кН	Расчетная плоскость координат xOy			Проекция силы на ось						
2			Расчетные углы, градусы									
3			Угол с осью Oz, перпендикулярной расчетной плоскости	Углы с осями в расчетной плоскости координат		Ось Ox	Ось Oy	Ось Oz				
4				С осью Ox	С осью Oy							
5	S ₁	найти	150	0	90	-0,866025	-5,31E-17	-0,866025				
6	S ₂	найти	150	80	10	-0,150384	-0,852869	-0,866025				
7	S ₃	найти	135	140	130	0,5416752	0,4545195	-0,707107				
8	T ₁	6	100	105	15	0,2696607	-1,006388	-1,041893				
9	T ₂	10	95	5	95	-0,868241	0,0759612	-0,871557				
10	T ₃	8	105	65	155	-0,875053	1,8765577	-2,070552				
11	Сумма проекций активных сил					-1,473633	0,9461314	-3,983993				
12	Матрица коэффициентов			Матрица реакции S1			Матрица реакции S2			Матрица реакции S3		
14	-0,866025404	-5,3E-17	-0,866025	-1,473633	0,946131	-3,984	-0,86603	-5,3E-17	-0,86603	-0,86603	-5,3E-17	-0,86603
15	-0,150383733	-0,85287	-0,866025	-0,150384	-0,852869	-0,86603	-1,47363	0,94613	-3,984	-0,15038	-0,85287	-0,86603
16	0,54167522	0,45452	-0,707107	0,5416752	0,454519	-0,70711	0,54168	0,45452	-0,70711	-1,47363	0,94613	-3,984
17				реакция S ₁		-2,97446	реакция S ₂		0,029131	реакция S ₃		-2,026945

2.4. Реакции связей для плоской произвольной системы сил

В зависимости от характера опорных частей возможны два варианта расчетных таблиц:

□ при опоре в виде жесткой заделки для определения реакций связей опоры наиболее оптимальным является первый вид записи уравнений равновесия и, следовательно, рекомендуется расчетная таблица вида (табл. 3),

□ при шарнирных опорных частях для определения реакций связей опор оптимальным будет второй вид записи уравнений равновесия и, следовательно, рекомендуется расчетная таблица вида (табл. 4).

Порядок работы при решении задач такого вида рекомендуется следующим:

■ заполняются столбцы исходных данных – *B, C, D, E, F*:
 — в столбец « вид нагрузки » заносится символьное обозначение нагрузки (СОН):

- сосредоточенная сила \Rightarrow « *СС* »,
- распределенная нагрузка \Rightarrow « *РН* »,
- сосредоточенный момент \Rightarrow « *СМ* »;

— в столбец « величина нагрузки » заносится:

- в строки для неизвестных реакций связей \Rightarrow « *найти* »,
- в строки для активных сил \Rightarrow величина модуля нагрузки.

Таблица 3

Рекомендуемая форма расчетной таблицы определения реакций связей при плоской произвольной системе сил (для решения используется первая форма записи системы уравнений равновесия)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Величина нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)		Угол с координатной осью	Проекция на первую координатную ось	Проекция на вторую координатную ось	Момент относительно расчетной точки
2				Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конец зоны действия распределенной нагрузки				
3	Реакция связи 1								
4	Реакция связи 2								
5	Реакция связи 3								
6	Активная нагрузка								
7								
8	Активная нагрузка								
9	Сумма действия активных нагрузок								
10									

Таблица 4

Рекомендуемая форма расчетной таблицы определения реакций связей при плоской произвольной системе сил (для решения используется вторая форма записи системы уравнений равновесия)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Величина нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)		Угол с координатной осью	Проекция на расчетную координатную ось	Момент относительно первой расчетной точки	Момент относительно второй расчетной точки
2				Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конец зоны действия распределенной нагрузки				
3	Реакция связи 1								
4	Реакция связи 2								
5	Реакция связи 3								
6	Активная нагрузка								
7								
8	Активная нагрузка								
9	Сумма действия активных нагрузок								

— заносятся координаты сечений приложения нагрузки в столбцы «координата сечения приложения нагрузки», для сосредоточенных силовых факторов в столбце «конец зоны действия распределенной нагрузки» заносится символ «—» (прочерк);

— в столбец с выбранной расчетной координатной осью заносятся значения углов положения нагрузки относительно направления координатной оси, для сосредоточенных моментов заносится символ «—»

▪ в расчетные столбцы **G, H, I** вводятся необходимые расчетные формулы и **Автозаполнением** определяются соответствующие величины для всех реакций связей и активных сил, рекомендуемое содержание формул представляет собой сложную логическую функцию **ЕСЛИ** с необходимым числом вложений и имеет примерно следующий вид:

— для проекции на расчетную координатную ось (первую расчетную координатную ось

— \Rightarrow **ЕСЛИ** (адрес ячейки *величина нагрузки* = « *найти* »; **ЕСЛИ** (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *сс* »; **COS** (**РАДИАНЫ** (адрес ячейки *угол с координатной осью*))); **ЕСЛИ** (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *рн* »; **COS** (**РАДИАНЫ** (адрес ячейки *угол с координатной осью*))) \times (адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* – адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*); **0**); **ЕСЛИ**(адрес ячейки *вид нагрузки* = « *сс* »; адрес ячейки *величина нагрузки* \times **COS** (**РАДИАНЫ** (адрес ячейки *угол с координатной осью*))); **ЕСЛИ** (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *рн* »;

адрес ячейки *величина нагрузки* × *COS (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))* × (адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* – адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*); 0)),

— для проекции на вторую координатную ось

⇒ *ЕСЛИ* (адрес ячейки *величина нагрузки* = « *найти* »; *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *сс* »; *SIN (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))*); *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *рн* »; *SIN (радианы (адрес ячейки *угол с координатной осью*))* × (адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* – адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*); 0)); *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *сс* »; адрес ячейки *величина нагрузки* × *SIN (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))*); *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *рн* »; адрес ячейки *величина нагрузки* × *SIN (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))* × (адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* – адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*); 0)),

— для « момента относительно расчетной точки (относительно первой расчетной точки) » необходимо в таблице выделить координату этой расчетной точки. Так как характер воздействия зависит от направления возможного вращения относительно расчетной точки, то в расчетные формулы необходимо вводить *знак момента*. Знак момента рекомендуется принимать, руководствуясь следующим правилом – момент принимается положительным при направлении возможного вращения против часовой стрелки и отрицательным при возможном вращении по часовой стрелке, в формуле вводится только знак отрицательного момента

⇒ *ЕСЛИ* (адрес ячейки *величина нагрузки* = « *найти* »; *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *сс* »; *знак момента ABS* (адрес ячейки *координата сечения приложения нагрузки* – адрес ячейки *координата расчетной точки*) × *COS (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))*); *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *рн* »; *знак момента* (адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* – адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*) × *ABS* ((адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* + адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*) / 2 – адрес ячейки *координата расчетной точки*) × *COS (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))*); *знак момента 1*); *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *сс* »; *знак момента* адрес ячейки *величина нагрузки* × *ABS* (адрес ячейки *координата сечения приложения нагрузки* – адрес ячейки *координата расчетной точки*) × *COS (РАДИАНЫ (адрес ячейки *угол с координатной осью*))*); *ЕСЛИ* (адрес ячейки *вид нагрузки* = « *рн* »; *знак момента* адрес ячейки *величина нагрузки* × (адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* –

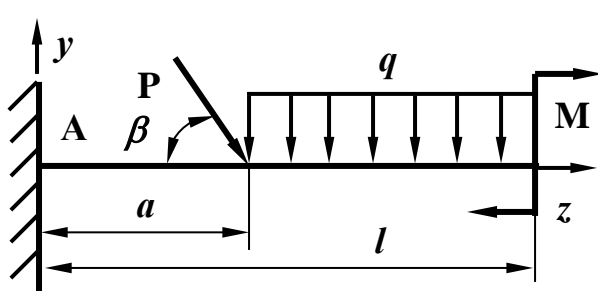
адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*) $\times ABS$ ((адрес ячейки *конец зоны действия распределенной нагрузки* + адрес ячейки *начало зоны действия распределенной нагрузки*) / 2 – адрес ячейки *координата расчетной точки*) $\times COS$ (**РАДИАНЫ** (адрес ячейки *угол с координатной осью*)); **знак момента** адрес ячейки *величина нагрузки*)),

— момент относительно второй расчетной точки определяется по формуле аналогичной моменту относительно первой расчетной точки,

- в столбцах **G, H, I** подсчитываются суммы действия активных сил,
- с использованием метода Крамера определяются величины неизвестных реакций связей.

2.4.1. Примеры расчета по определению реакций связей при плоской произвольной системе сил

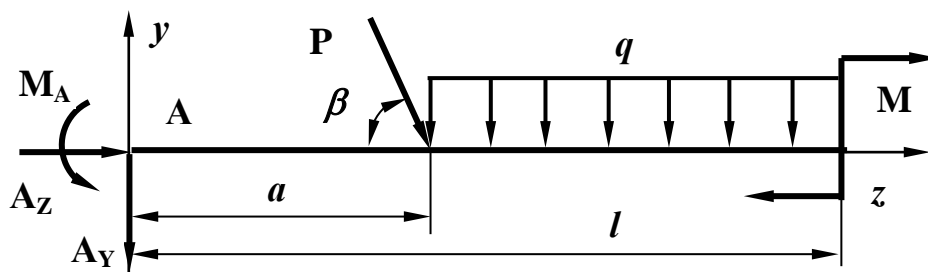
2.4.1.1. Определить реакции связей кран-балки с жестким защемлением для мастерских, по обслуживанию и ремонту сельхозтехники.



Исходные данные:
 сосредоточенная нагрузка $P=6$ кН,
 распределенная нагрузка $q=2$ кН/м,
 сосредоточенный момент $M=3$ кНм,
 линейные размеры:
 $a = 3$ м, $l = 5$ м,
 угол с осью $z - \beta = 60^\circ$.

Решение:

В опорной точке A фактические связи заменяем их реакциями и вычерчиваем расчетную силовую схему



Для решения используем расчетную таблицу по форме табл. 3. Заполняем столбы, характеризующие величину и характер силовых факторов, координаты сечений приложения силовых факторов, указываем координату расчетного сечения (точки) определения моментов силовых факторов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Величина нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)		Угол с координатной осью Y	Проекция на координатную ось Y	Проекция на координатную ось Z	Момент относительно расчетной точки A	
2				Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конец зоны действия распределенной нагрузки					
3	Реакция A_z	сн	найти	0		90				
4	Реакция A_y	сн	найти	0		180				
5	Реакция M_A	см	найти	0						
6	P	сн	6	3		150				
7	q	рн	2	3	5	180				
8	M	см	-3	5						
9	Сумма действия активных нагрузок									
10	Координата расчетного сечения определения моментов (точки A)							0		

Вводим расчетные формулы для определения проекций сил на координатные оси (показана формула для определения проекции на ось Z).

H3		=ЕСЛИ(С3="найти";ЕСЛИ(В3="сн";SIN(РАДИАНЫ(F3));ЕСЛИ(В3="рн";SIN(РАДИАНЫ(F3))*(Е3-D3);0));ЕСЛИ(В3="сн";С3*SIN(РАДИАНЫ(F3));ЕСЛИ(В3="рн";С3*SIN(РАДИАНЫ(F3))*(Е3-D3);0)))													
1	A	B	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)				Угол с координатной осью Y	Проекция на координатную ось Y	Проекция на координатную ось Z	Момент относительно расчетной точки A					
			Величина нагрузки	Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конечная зона действия распределенной нагрузки										
2	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)													
3	Реакция A_z	сн	найти	0			90	6E-17	1						
4	Реакция A_y	сн	найти	0			180	-1	1,2E-16						
5	Реакция M_A	см	найти	0				0	0						
6	P	сн	6	3			150	-5,196	3						
7	φ	рн	2	3	5		180	-4	4,9E-16						
8	M	см	-3	5				0	0						
9	Сумма действия активных нагрузок							-9,196	3						
10	Координата расчетного сечения определения моментов (точки A)										0				

Вводим формулу для определения момента силовых факторов относительно расчетной точки

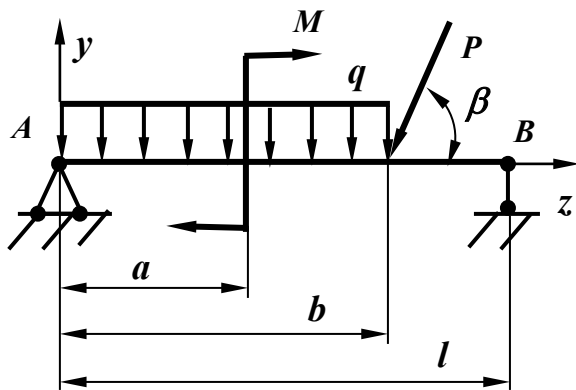
I3		=ЕСЛИ(С3="найти";ЕСЛИ(В3="сн";ЕСЛИ(D3-\$G\$10<=0;ABS(D3-\$G\$10)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))-ABS(D3-\$G\$10)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))));ЕСЛИ(В3="рн";ЕСЛИ((Е3+D3)/2-\$G\$10<=0;ABS((Е3+D3)/2-\$G\$10)*(Е3-D3)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))-ABS((Е3+D3)/2-\$G\$10)*(Е3-D3)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))));ЕСЛИ(В3="сн";ЕСЛИ(D3-\$G\$10<=0;С3*ABS(D3-\$G\$10)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))-С3*ABS(D3-\$G\$10)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))));ЕСЛИ(В3="рн";ЕСЛИ((Е3+D3)/2-\$G\$10<=0;С3*ABS((Е3+D3)/2-\$G\$10)*(Е3-D3)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))-С3*ABS((Е3+D3)/2-\$G\$10)*(Е3-D3)*ABS(COS(РАДИАНЫ(F3)))));С3)))													
1	A	B	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)				Угол с координатной осью Y	Проекция на координатную ось Y	Проекция на координатную ось Z	Момент относительно расчетной точки					
			Величина нагрузки	Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конечная зона действия распределенной нагрузки										
2	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)													
3	Реакция A_z	сн	найти	0			90	6E-17	1	0					
4	Реакция A_y	сн	найти	0			180	-1	1,2E-16	0					
5	Реакция M_A	см	найти	0				0	0	1					
6	P	сн	6	3			150	-5,196	3	-15,59					
7	φ	рн	2	3	5		180	-4	4,9E-16	-16					
8	M	см	-3	5				0	0	-3					
9	Сумма действия активных нагрузок							-9,196	3	-34,59					
10	Координата расчетного сечения определения моментов (точки A)										0				

Подготавливаем: копированием массив коэффициентов при неизвестных усилия и заменой соответствующей строки массива коэффициентов строкой сумм действия активных сил массивы для определения неизвестных усилий.

Определяем величину неизвестных усилий, используя функцию **МОПРЕД** (показана формула для определения усилия A_y).

111		=-МОПРЕД(J7:L9)/МОПРЕД(J3:L5)															
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
2	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Величина нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)		Угол с координатной осью Y	Проекция на координатную ось Y	Проекция на координатную ось Z	Момент относительно расчетной точки A								
3				Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конец зоны действия распределенной нагрузки												
3	Реакция A_z	сн	найти	0		90	6,0E-17	1	0	6,0E-17	1	0		-9,196	3	-34,59	
4	Реакция A_y	сн	найти	0		180	-1	1,3E-16	0	-1	1,3E-16	0		-1	1,3E-16	0	
5	Реакция M_A	см	найти	0		0	0	1	0	0	1	0		0	0	1	
6	P	сн	6	3		150	-5,196	3	-15,59								
7	q	рн	2	3	5	180	-4	4,9E-16	-16	6,0E-17	1	0		6,0E-17	1	0	
8	M	см	-3	5		0	0	-3	-9,196	3,0E+00	-34,59			-1	1,3E-16	0	
9	Сумма действия активных нагрузок						-9,196	3	-34,59	0	0	1		-9,196	3	-34,59	
10	Координата расчетного сечения определения моментов (точки A)							0									
11	Реакция A_z			-3,00		Реакция A_y			-9,20		Реакция M_A			34,59			

2.4.1.2. Определить реакции связей подкрановой балки, лежащей на двух шарнирных опорах: подвижной и неподвижной; в механическом цехе.

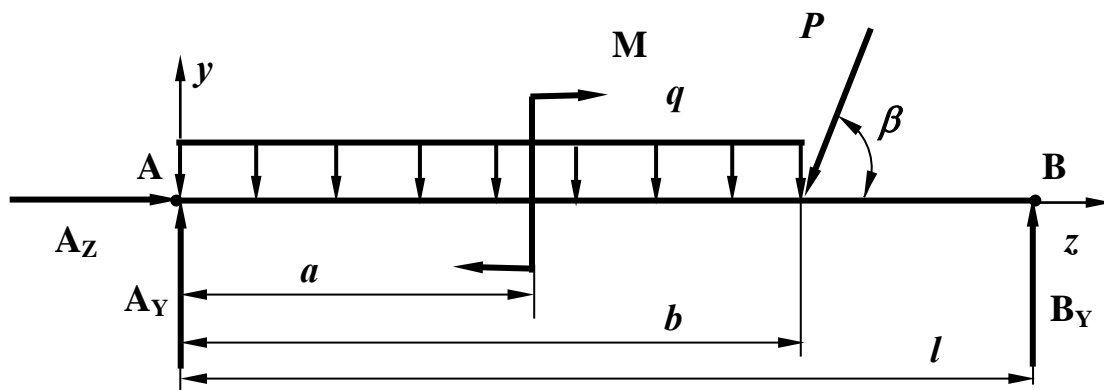


Исходные данные:

сосредоточенная нагрузка $P=8$ кН,
 распределенная нагрузка $q=2$ кН/м,
 сосредоточенный момент $M=5$ кНм,
 линейные размеры:
 $a = 2$ м, $b = 5$ м; $l = 8$ м,
 угол с осью $z - \beta = 75^\circ$.

Решение:

В опорных точках A и B фактические связи заменяем их реакциями и вычерчиваем расчетную силовую схему.



Для решения используем расчетную таблицу по форме табл. 4. Заполняем столбы, характеризующие величину и характер силовых факторов, координаты сечений приложения силовых факторов, указываем координаты расчетных сечений (точек) определения моментов силовых факторов.

1	A	B	C	D		E	F	G	H	I
	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Величина нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)		Угол с расчетной координатной осью Z	Проекция на расчетную координатную ось Z	Момент относительно первой расчетной точки A	Момент относительно второй расчетной точки B	
Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)				Конец зоны действия распределенной нагрузки						
2										
3	A_z	сн	найти	0		0				
4	A_y	сн	найти	0		90				
5	B_y	сн	найти	8		90				
6	P	сн	8	5		-105				
7	q	рн	2	0	5	90				
8	M	см	-5	2						
9	Сумма действия активных нагрузок									
10	Координата первого расчетного сечения определения моментов (точки A)								0	
11	Координата второго расчетного сечения определения моментов (точки B)								8	

Вводим расчетную формулу для определения проекций сил на координатную ось.

G3		=ЕСЛИ(С3="найти";ЕСЛИ(В3="сн";COS(РАДИАНЫ(F3));ЕСЛИ(В3="рн";(Е3-D3)*COS(РАДИАНЫ(F3));0);ЕСЛИ(В3="сн";С3*COS(РАДИАНЫ(F3));ЕСЛИ(В3="рн";С3*(Е3-D3)*COS(РАДИАНЫ(F3));0)))												
1	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)				Угол с расчетной координатной осью Z	Проекция на расчетную координатную ось Z	Момент относительно первой расчетной точки A	Момент относительно второй расчетной точки B				
			Величина нагрузки	Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конечная зона действия распределенной нагрузки									
2														
3	Az	сн	найти	0			0	1						
4	Ay	сн	найти	0			90	6E-17						
5	By	сн	найти	8			90	6E-17						
6	P	сн	8	5			-105	-2,071						
7	q	рн	2	0	5		90	6E-16						
8	M	см	-5	2				0						
9	Сумма действия активных нагрузок							-2,071						
10	Координата первого расчетного сечения определения моментов (точки A)									0				
11	Координата второго расчетного сечения определения моментов (точки B)									8				

Вводим формулы для определения момента силовых факторов относительно расчетных точек (показана формула для определения моментов относительно точки B).

I3		=ЕСЛИ(С3="найти";ЕСЛИ(В3="сн";ЕСЛИ(D3-\$H\$11<0;-ABS(D3-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3)));ABS(D3-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3))););ЕСЛИ(В3="рн";ЕСЛИ((Е3+D3)/2-\$H\$11<0;(Е3-D3)*ABS((Е3+D3)/2-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3)));-(Е3-D3)*ABS((Е3+D3)/2-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3))););1);ЕСЛИ(В3="сн";ЕСЛИ(D3-\$H\$11<0;С3*ABS(D3-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3)));-С3*ABS(D3-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3))););ЕСЛИ(В3="рн";ЕСЛИ((Е3+D3)/2-\$H\$11<0;С3*(Е3-D3)*ABS((Е3+D3)/2-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3)));-С3*(Е3-D3)*ABS((Е3+D3)/2-\$H\$11)*ABS(SIN(РАДИАНЫ(F3))););С3)))												
1	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)				Угол с расчетной координатной осью Z	Проекция на расчетную координатную ось Z	Момент относительно первой расчетной точки A	Момент относительно второй расчетной точки B				
			Величина нагрузки	Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конечная зона действия распределенной нагрузки									
2														
3	Az	сн	найти	0			0	1	0	0				
4	Ay	сн	найти	0			90	6E-17	0	-8				
5	By	сн	найти	8			90	6E-17	8	0				
6	P	сн	8	5			-105	-2,071	-38,64	23,182				
7	q	рн	2	0	5		90	6E-16	-25	55				
8	M	см	-5	2				0	-5	-5				
9	Сумма действия активных нагрузок							-2,071	-68,64	73,182				
10	Координата первого расчетного сечения определения моментов (точки A)									0				
11	Координата второго расчетного сечения определения моментов (точки B)									8				

Подготавливаем: копированием массив коэффициентов при неизвестных усилия и заменой соответствующей строки массива коэффициентов строкой сумм действия активных сил массивы для определения неизвестных усилий.

Определяем величину неизвестных усилий, используя функцию **МОПРЕД** (показана формула для определения усилия A_y).

011		=-МОПРЕД(J7:L9)/МОПРЕД(J3:L5)														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Обозначение нагрузки (силового фактора)	Вид нагрузки (размерность)	Величина нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки (зона действия нагрузки)		Угол с расчетной координатной осью Z	Проекция на расчетную координатную ось Z	Момент относительно первой расчетной точки A	Момент относительно второй расчетной точки B							
2				Сечение приложения сосредоточенных нагрузок (начало зоны действия распределенной нагрузки)	Конец зоны действия распределенной нагрузки											
3	A_z	сн	найти	0		0	1	0	0	1,00	0,00	0,00		-2,07	-68,64	73,18
4	A_y	сн	найти	0		90	6E-17	0	-8	0,00	0,00	-8,00		0,00	0,00	-8,00
5	B_y	сн	найти	8		90	6E-17	8	0	0,00	8,00	0,00		0,00	8,00	0,00
6	P	сн	8	5		-105	-2,071	-38,64	23,182							
7	q	рн	2	0	5	90	6E-16	-25	55	1,00	0,00	0,00		1,00	0,00	0,00
8	M	см	-5	2			0	-5	-5	-2,07	-68,64	73,18		0,00	0,00	-8,00
9	Сумма действия активных нагрузок						-2,071	-68,64	73,182	0,00	8,00	0,00		-2,07	-68,64	73,18
10	Координата первого расчетного сечения определения моментов (точки A)							0								Реакция A_z 2,07
11	Координата второго расчетного сечения определения моментов (точки B)							8								Реакция A_y 9,15
12																Реакция B_y 8,5798

3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ И ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ (ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА)

При оценке динамических реакций движущихся элементов и деталей сельскохозяйственных машин и механизмов необходимо знать положение центра тяжести (центра масс) и геометрические характеристики этих тел. Прочностные расчеты элементов конструкции машин и технологического оборудования также требуют знания геометрических характеристик поперечных сечений этих элементов.

Наиболее актуальным чаще всего необходимо для технических приложений решение указанных вопросов для плоских фигур или плоских сечений материальных тел.

3.1. Центр тяжести плоской фигуры (сечения) и геометрические характеристики плоских фигур (сечений)

Центром тяжести тела называется точка, через которую проходит линия действия силы тяжести при любом положении тела в пространстве.

Сечение тела какой-либо плоскостью правомерно считать однородным физическим телом, для которого толщина бесконечно мала по сравнению с длиной и шириной.

В этом случае, при расположении координатных осей OX и OY в плоскости сечения, координаты центра тяжести определяются условиями:

$$x_c = \frac{\sum_A A_k x_k}{\sum_A A_k}, \quad y_c = \frac{\sum_A A_k y_k}{\sum_A A_k},$$

где A_k – площади отдельных частиц (частей) сечения;

x_k – координата положения частицы k относительно оси OY ;

y_k – координата положения частицы k относительно оси OX ;

$\sum_A A_k x_k$ – статический момент площади плоского сечения относительно оси Y ,

$\sum_A A_k y_k$ – статический момент площади плоской фигуры относительно оси X .

В качестве отдельной частицы может выступать: простые геометрические фигуру, площади и положение центра тяжести которых известны или легко определяются из геометрических соображений; стандартные фигуры (например, профили стандартных промышленных

изделий), для которых площади и положение центра тяжести можно взять из справочных данных.

Следует помнить, что для симметричных фигур центр тяжести расположен на оси симметрии; соответственно для фигур, имеющих две оси симметрии – в точке пересечения осей симметрии.

В задачах «Сопротивления материалов» для оценки напряжений в сечении элемента конструкции необходимо знать такие характеристики плоского сечения как:

полярный момент инерции сечения

$$I_O = \int_A \rho^2 dA = \sum_A \rho_k^2 A_k,$$

где ρ, ρ_k – расстояние от центра тяжести сечения до элементарной площадки dA или до частицы сечения k с площадью A_k соответственно.

осевые моменты инерции относительно осей OX и OY , лежащих в плоскости сечения:

$$\text{относительно оси } X - I_X = \int_A y^2 dA = \sum_A y_k^2 A_k,$$

$$\text{относительно оси } Y - I_Y = \int_A x^2 dA = \sum_A x_k^2 A_k,$$

где y, y_k – расстояние от оси X до центра элементарной площадки dA или до частицы сечения k с площадью A_k ;

x, x_k – расстояние от оси Y до центра элементарной площадки dA или до частицы сечения k с площадью A_k .

полярный момент сопротивления

$$W_O = \frac{I_O}{\rho_{max}},$$

где ρ_{max} – расстояние от центра сечения до наиболее удаленной точки его.

осевые моменты сопротивления:

$$\text{относительно оси } X - W_X = \frac{I_X}{y_{max}},$$

$$\text{относительно оси } Y - W_Y = \frac{I_Y}{x_{max}},$$

где y_{max}, x_{max} – соответственно расстояние от оси X или Y до наиболее удаленной от этих осей точки сечения.

В том случае, когда в качестве элементарной частицы сечения выступают плоские геометрические фигуры или стандартные профили (сечение является составным) при определении моментов инерции учитывают уравнения для моментов инерции при параллельном переносе осей:

осевые моменты инерции относительно оси X :

$$I_X = \sum_A (I_{XC} + A_k a^2),$$

осевые моменты инерции относительно оси Y :

$$I_Y = \sum_A (I_{YC} + A_k b^2),$$

где I_{XC} – осевой момент инерции отдельной геометрической фигуры составного сечения относительно собственной оси X_C , параллельной центральной оси X всего сечения,

I_{YC} – осевой момент инерции отдельной геометрической фигуры составного сечения относительно собственной оси Y_C , параллельной центральной оси Y всего сечения,

a – расстояние между собственной осью отдельной геометрической фигуры составного сечения X_C и центральной осью X всего сечения,

b – расстояние между собственной осью отдельной геометрической фигуры составного сечения Y_C и центральной осью Y всего сечения.

В большом количестве случаев для составных сечений моменты инерции, определенные относительно осей, проходящих через центр тяжести, не являются, окончательно определяющими свойствами сечения (главными осями данного сечения).

Поэтому рекомендуется определять центробежные моменты инерции сечения относительно обеих центральных осей рассматриваемого сечения. С учетом условий параллельного переноса осей величина центробежного момента инерции определяется условием:

$$I_{XY} = \sum_A (I_{XYC} + A_k ab),$$

где I_{XYC} – центробежный момент инерции отдельной геометрической фигуры составного сечения относительно собственных осей X_C и Y_C , параллельных центральным осям X и Y всего сечения.

Следует помнить, что центробежный момент симметричных относительно какой либо собственной оси, равен нулю.

В случае если центробежный момент сечения не равен нулю, необходимо определить угол поворота центральных осей α для оценки их главного положения и подсчитать осевые моменты инерции, соответствующие этому положению центральных осей – главные центральные моменты инерции сечения.

Необходимый угол поворота осей составляет:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}.$$

Главные осевые моменты инерции сечения будут равны:

$$I_{max} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + I_{XY}^2},$$

$$I_{min} = \frac{I_X - I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + I_{XY}^2}.$$

Следует помнить, что всегда соблюдается условие

$$I_O = I_X + I_Y = I_{max} + I_{min}.$$

В зависимости от характера сечения несколько отличается характер и порядок расчетов.

3.2. Геометрические характеристики сечения, составленного из произвольных плоских фигур

Необходимо разбить сечение на простейшие плоские фигуры (прямоугольник, квадрат, круг), задаться начальным положением координатных осей, для выполнения основных расчетов рекомендуется принять следующую форму расчетной таблицы (табл. 5).

Таблица 5

Рекомендуемая форма расчетной таблицы определения геометрических характеристик сечения.

E7		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
				высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _C	оси Y _C	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный	
2														J _{X_C}	J _{Y_C}	J _{X_CY_C}
3																
4																
5																
6																
7																
8																

Рекомендуемый порядок работы при расчетах с таблицей предлагаемой формы следующий:

- заполняются столбцы, включающие исходные данные:
 - в ячейки столбца **B** вносится характеристика элементов, на которые разбито исходное плоское сечение:

- если элемент дополняет сечение, то рекомендуется вносить символ – «С»,
- если элемент исключается из сечения, то рекомендуется вносить символ – «В»,
- в ячейки столбца *C* вносится условное обозначение простейших фигур, рекомендуется:
 - для прямоугольника и квадрата вводить символ – «*np*»,
 - для круга – «*кр*»,
- в ячейки столбцов *D* и *E* вносятся размеры элементов, на которые разбито сечение; при этом: для квадратного элемента размер высоты должен быть одинаковым, а для круглого – вносится только величина радиуса в ячейку столбца *D*,
- в ячейки столбцов *G* и *H* вносятся координаты центра тяжести элемента относительно принятых осей координат,
- в соответствующие расчетные столбцы вводятся формулы для определения необходимых величин:
 - в ячейку *F4* (столбец *F*) вводится формула определения учитываемой площади элемента –

$$\Rightarrow \text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{В4}=\text{"С"}; \text{С4}=\text{"np"}); \text{D4}*\text{E4}; \text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{В4}=\text{"В"}; \text{С4}=\text{"np"}); -\text{D4}*\text{E4}; \text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{В4}=\text{"С"}; \text{С4}=\text{"кр"}); \text{ПИ}()*\text{СТЕПЕНЬ}(\text{D4}; 2); -\text{ПИ}()*\text{СТЕПЕНЬ}(\text{D4}; 2))))$$
 - за пределами расчетной таблицы выделить дополнительные расчетные ячейки, в которые ввести формулы для определения координат расположения центра тяжести сечения в принятой системе координат:
 - в ячейку для определения координаты центра тяжести сечения относительно оси *X* – координаты U_C

$$\Rightarrow \text{СУММПРОИЗВ}(\text{массив ячеек столбца } F, \text{ включающий величину площадей отдельных элементов сечения; массив ячеек столбца } G, \text{ включающий значения координат расположения центров тяжести отдельных элементов сечения относительно оси } X) / \text{СУММ}(\text{ссылка на массив ячеек столбца } F, \text{ включающий величину площадей отдельных элементов сечения})$$
 - в ячейку для определения координаты центра тяжести сечения относительно оси *Y* – координаты X_C

$$\Rightarrow \text{СУММПРОИЗВ}(\text{ссылка на массив ячеек столбца } F, \text{ включающий величину площадей отдельных элементов сечения; ссылка на массив ячеек столбца } H, \text{ включающий значения координат расположения центров тяжести отдельных элементов сечения относительно оси } Y) / \text{СУММ}(\text{ссылка на массив ячеек столбца } F, \text{ включающий величину площадей отдельных элементов сечения}),$$

– в ячейки столбцов *I* и *J* вводятся формулы определения координат положения центров тяжести отдельных элементов сечения относительно центральных осей:

▪ в ячейку *I4* формулу для определения координат относительно новой оси X_C

⇒ *G4* – абсолютная ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты Y_C ,

▪ в ячейку *J4* формулу для определения координат относительно новой оси Y_C

⇒ *H4* – абсолютная ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты X_C ,

– в ячейки столбцов *K* и *L* вводятся формулы для определения моментов инерции составных элементов сечения относительно собственных осей:

▪ в ячейку *K4* вводятся формула для определения осевого момента инерции составного элемента сечения относительно оси X_i

⇒ **ЕСЛИ(И(В4="С";С4="np");СТЕПЕНЬ(D4;3)*E4/12; ЕСЛИ(И(В4="В"; С4="np");-СТЕПЕНЬ(D4;3)* E4/12; ЕСЛИ(И(В4="С"; С4="кр"); ПИ()*СТЕПЕНЬ(D4;4)/4; -ПИ()* СТЕПЕНЬ (D4;4)/12))),**

▪ в ячейку *L4* вводятся формула для определения осевого момента инерции составного элемента сечения относительно оси Y_i

⇒ **ЕСЛИ(И(В4="С";С4="np");СТЕПЕНЬ(E4;3)*D4/12; ЕСЛИ(И(В4="В"; С4="np");-СТЕПЕНЬ(E4;3)* D4/12; ЕСЛИ(И(В4="С"; С4="кр"); ПИ()*СТЕПЕНЬ(D4;4)/4; -ПИ()* СТЕПЕНЬ (D4;4)/12))),**

– в ячейки столбцов *M*, *N* и *O* вводятся формулы для определения моментов инерции составных элементов сечения относительно центральных осей:

▪ в ячейку *M4* вводятся формула определения осевого момента инерции относительно оси X_C

⇒ *K4* + *F4**СТЕПЕНЬ(ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси Y_C ;2),

▪ в ячейку *N4* вводятся формула определения осевого момента инерции относительно оси Y_C

⇒ *L4* + *F4**СТЕПЕНЬ(ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси X_C ;2),

▪ в ячейку *O4* вводятся формула определения центробежного момента инерции относительно осей X_C и Y_C

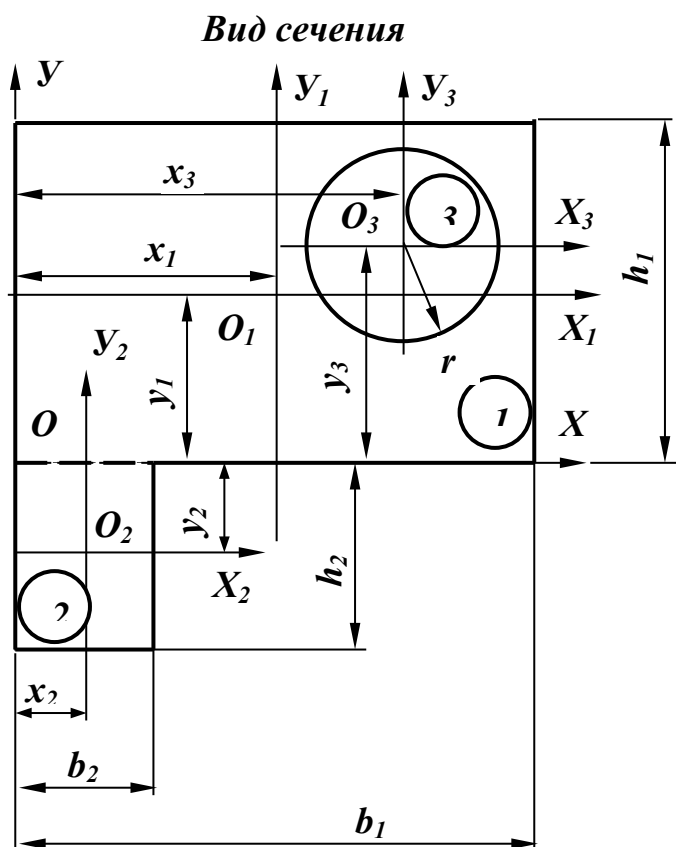
⇒ *F4** ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси X_C *ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси Y_C ,

□ за пределами расчетной таблицы выделить дополнительно шесть расчетных ячеек. В эти ячейки ввести формулы: для определения осевых и центробежного моментов инерции заданного сечения относительно

центральных осей; угла, определяющего положения главных осей сечения, и главных моментов инерции сечения:

- в ячейку, выделенную для определения осевого момента инерции сечения относительно центральной оси X_C , ввести формулу
 \Rightarrow СУММ(массив ячеек столбца M),
- в ячейку, выделенную для определения осевого момента инерции сечения относительно центральной оси Y_C , ввести формулу
 \Rightarrow СУММ(массив ячеек столбца N),
- в ячейку, выделенную для определения центробежного момента инерции сечения относительно центральных осей X_C и Y_C , ввести формулу
 \Rightarrow СУММ(массив ячеек столбца O),
- в ячейки, выделенные для определения угла поворота главных осей и главных моментов инерции, ввести формулы в соответствии с адресами ячеек, в которых подсчитаны осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей.

3.2.1. Пример определения геометрических характеристик сечения, составленного из произвольных плоских фигур



Исходные данные

Сечение включает в себя:

Прямоугольную пластину 1:
 шириной – $b_1 = 30$ см,
 высотой – $h_1 = 20$ см.

Прямоугольный выступ 2:
 шириной – $b_2 = 8$ см,
 высотой – $h_2 = 10$ см.

Круглое отверстие 3 в основной пластине радиусом $r = 6$ см.

Координаты центров составных элементов в принятой системе координатных осей XOY :

$$x_1 = 15 \text{ см}, y_1 = 10 \text{ см};$$

$$x_2 = 4 \text{ см}, y_2 = -5 \text{ см};$$

$$x_3 = 22 \text{ см}, y_3 = 13 \text{ см}.$$

Решение:

Предварительно назначается принимаемое направление координатных осей XOY (на схеме сечения направление осей уже намечено).

Сечение разбивается на простейшие элементы: прямоугольник 1 , прямоугольник 2 и круглое отверстие 3 . В принятой системе координатных осей определяются координаты центров тяжести выбранных простейших элементов (см. исходные данные).

Заполняются в расчетной таблице столбцы, включающие исходные данные: A, B, C, D, E, G и H .

K22															
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
2				высота (радиус)	ширина		оси X , см	оси Y , см	оси X_C , см	оси Y_C , см	оси X_i	оси Y_i	осевые		центробежный
3													J_{XC}	J_{YC}	
4	1	С	ПР	20	30		10,0	15,0							
5	2	С	ПР	10	8		5,0	4,0							
6	3	В	КР	6			13,0	22,0							
7															

В ячейку $F4$ вводится формула для определения площади отдельных элементов сечения.

F4		=ЕСЛИ(И(В4="С";С4="ПР");D4*Е4;ЕСЛИ(И(В4="В";С4="ПР");-D4*Е4;ЕСЛИ(И(В4="С";С4="КР");ПИ()*СТЕПЕНЬ(D4;2);-ПИ														
1	Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
				высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный	
													J _{XС}	J _{YС}		J _{XСYС}
4	1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0								
5	2	С	ПР	10	8		5,0	4,0								
6	3	В	КР	6			13,0	22,0								
7																

Автозаполнением определяются площади элементов сечения.

В ячейку **G8** вводится формула для определения координаты центра тяжести сечения относительно оси $Y - X_C$.

G8		=СУММПРОИЗВ(F4:F6;H4:H6)/СУММ(F4:F6)														
1	Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
				высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный	
													J _{XС}	J _{YС}		J _{XСYС}
4	1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0								
5	2	С	ПР	10	8	80,0	5,0	4,0								
6	3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0								
7																
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси $Y - X_C$						12,1									

В ячейку **G9** вводится формула для определения координаты центра тяжести сечения относительно оси $X - Y_C$.

G9 = =СУММПРОИЗВ(F4:F6;G4:G6)/СУММ(F4:F6)															
1	2	3	4	5	6	7	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
							оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный
													J _{Xc}	J _{yc}	
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0								
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0								
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0								
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y · X _C						12,1									
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X · Y _C						7,3									

В ячейку **I4** вводится формула для определения координат центров тяжести элементов сечения относительно центральной оси X_C.

I4 = =G4-\$G\$9															
1	2	3	4	5	6	7	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
							оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный
													J _{Xc}	J _{yc}	
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7							
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0								
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0								
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y · X _C						12,1									
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X · Y _C						7,3									

Автозаполнением определяются координаты центров тяжести элементов сечения относительно оси X_C.

В ячейку **J4** вводится формула для определения координат центров тяжести элементов сечения относительно центральной оси Y_C .

J4														=H4-\$G\$8			
1	A	B	C	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения				
				2	3		4	5	6	7	8	9	10	11	осевые		центробежный
															оси X , см	оси Y , см	
4	1	C	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9							
5	2	C	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3								
6	3	B	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7								
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси $Y \cdot X_C$						12,1										
9	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси $X \cdot Y_C$						7,3										

Автозаполнением определяются координаты центров тяжести элементов сечения относительно оси Y_C .

В ячейку **K4** вводится формула для определения осевых моментов элементов сечения относительно собственных осей X_i .

K4														=ЕСЛИ(И(B4="C";C4="ПР");E4*СТЕПЕНЬ(D4;3)/12;ЕСЛИ(И(B4="B";C4="ПР");-E4*СТЕПЕНЬ(D4;3)/12;ЕСЛИ(И(B4="C";C4="СТЕПЕНЬ(D4;4)/4;-ПИ()*СТЕПЕНЬ(D4;4)/4)))			
1	A	B	C	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения				
				2	3		4	5	6	7	8	9	10	осевые		центробежный	
														оси X , см	оси Y , см		оси X_C , см
4	1	C	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0						
5	2	C	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1							
6	3	B	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9							
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси $Y \cdot X_C$						12,1										
9	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси $X \cdot Y_C$						7,3										

Автозаполнением определяются осевые моменты инерции элементов сечения относительно собственных осей X_i .

В ячейку **L4** вводится формула для определения осевых моментов элементов сечения относительно собственных осей Y_i .

L4 = =ЕСЛИ(И(В4="С";С4="ПР");D4*СТЕПЕНЬ(Е4;3)/12;ЕСЛИ(И(В4="В";С4="КР");-D4*СТЕПЕНЬ(Е4;3)/12;ЕСЛИ(И(В4="С";С4*СТЕПЕНЬ(Д4;4)/4;-ПИ()*СТЕПЕНЬ(Д4;4)/4)))																		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
										оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный
Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	высота (радиус)	ширина	Площадь сечения, см ²	оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	оси X _i	оси Y _i	J _{XC}	J _{YC}	J _{XcYc}				
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000							
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7								
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9								
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y · X _С						12,1												
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X · Y _С						7,3												

Автозаполнением определяются осевые моменты инерции элементов сечения относительно собственных осей Y_i .

В ячейку **M4** вводится формула для определения осевых моментов инерции элементов сечения относительно центральной оси X_С.

M4 = =K4+F4*СТЕПЕНЬ(Л4;2)																		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
										оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный
Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	высота (радиус)	ширина	Площадь сечения, см ²	оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	оси X _i	оси Y _i	J _{XC}	J _{YC}	J _{XcYc}				
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6						
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7							
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9							
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y · X _С						12,1												
Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X · Y _С						7,3												

Автозаполнением определяются осевые моменты инерции элементов сечения относительно центральной оси X_C .

В ячейку **N4** вводится формула для определения осевых моментов инерции элементов сечения относительно центральной оси Y_C .

N4		=L4+F4*СТЕПЕНЬ(J4;2)													
1 Номер элемента	2 Характер элемента	3 Вид элемента	4 Размеры элемента, см		5 Площадь сечения, см ²	6 Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		7 Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		8 Моменты инерции элементов относительно собственных осей		9 Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
			10 высота (радиус)	11 ширина		12 оси X, см	13 оси Y, см	14 оси X _C , см	15 оси Y _C , см	16 оси X _i	17 оси Y _i	18 осевые		19 центробежный	
												20 J _{X_C}	21 J _{Y_C}		22 J _{X_CY_C}
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2		
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84			
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12			
8 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _C						12,1									
9 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _C						7,3									

Автозаполнением определяются осевые моменты инерции элементов сечения относительно центральной оси Y_C .

В ячейку **O4** вводится формула для определения центробежных моментов инерции элементов сечения относительно системы координатных осей $X_C Y_C$.

O4		=F4*I4*J4													
1 Номер элемента	2 Характер элемента	3 Вид элемента	4 Размеры элемента, см		5 Площадь сечения, см ²	6 Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		7 Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		8 Моменты инерции элементов относительно собственных осей		9 Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
			10 высота (радиус)	11 ширина		12 оси X, см	13 оси Y, см	14 оси X _C , см	15 оси Y _C , см	16 оси X _i	17 оси Y _i	18 осевые		19 центробежный	
												20 J _{X_C}	21 J _{Y_C}		22 J _{X_CY_C}
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1	
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4		
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1		
8 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _C						12,1									
9 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _C						7,3									

Автозаполнением определяются центробежные моменты инерции элементов сечения относительно системы координатных осей $X_C Y_C$.

В ячейке **M8** определяется осевой момент инерции сечения относительно оси X_C .

M8 = СУММ(M4:M6)																										
1	2	3	A	B	C	D	E	F	G		H		I		J		K		L		M		N		O	
									Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения					
												высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный			
																					J _{X_C}	J _{Y_C}	J _{X_CY_C}			
4	1	C	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1											
5	2	C	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4	7912,5											
6	3	B	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1	-6430,7											
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _C							12,1	Осевой момент инерции относительно оси X _C				32451,3													
9	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _C							7,3																		

В ячейке **M9** определяется осевой момент инерции сечения относительно оси Y_C .

M9 = СУММ(N4:N6)																										
1	2	3	A	B	C	D	E	F	G		H		I		J		K		L		M		N		O	
									Номер элемента	Характер элемента	Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения					
												высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный			
																					J _{X_C}	J _{Y_C}	J _{X_CY_C}			
4	1	C	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1											
5	2	C	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4	7912,5											
6	3	B	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1	-6430,7											
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _C							12,1	Осевой момент инерции относительно оси X _C				32451,3													
9	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _C							7,3	Осевой момент инерции относительно оси Y _C				43617,6													

В ячейке **M10** определяется центробежный момент инерции сечения относительно системы координатных осей $X_C Y_C$.

M10 = =СУММ(O4:O6)																									
1	A	B	C	D		E	F	G		H		I		J		K		L		M		N		O	
				Номер элемента	Характер элемента			Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения							
									высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный					
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1											
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4	7912,5											
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1	-6430,7											
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _C							12,1	Осевой момент инерции относительно оси X _C							32451,3									
9	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _C							7,3	Осевой момент инерции относительно оси Y _C							43617,6									
10	Угол поворота главных осей сечения, градусы							24,2	Центробежный момент инерции относительно системы координатных осей X _C Y _C							6285,9									

В ячейке **G10** определяется угол поворота главных осей сечения.

G10 = =ГРАДУСЫ(ATAN(2*M10/(M9-M8))/2)																									
1	A	B	C	D		E	F	G		H		I		J		K		L		M		N		O	
				Номер элемента	Характер элемента			Вид элемента	Размеры элемента, см		Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно собственных осей		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения							
									высота (радиус)	ширина		оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	оси X _i	оси Y _i	осевые		центробежный					
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1											
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4	7912,5											
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1	-6430,7											
8	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _C							12,1	Осевой момент инерции относительно оси X _C							32451,3									
9	Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _C							7,3	Осевой момент инерции относительно оси Y _C							43617,6									
10	Угол поворота главных осей сечения, градусы							24,2	Центробежный момент инерции относительно системы координатных осей X _C Y _C							6285,9									

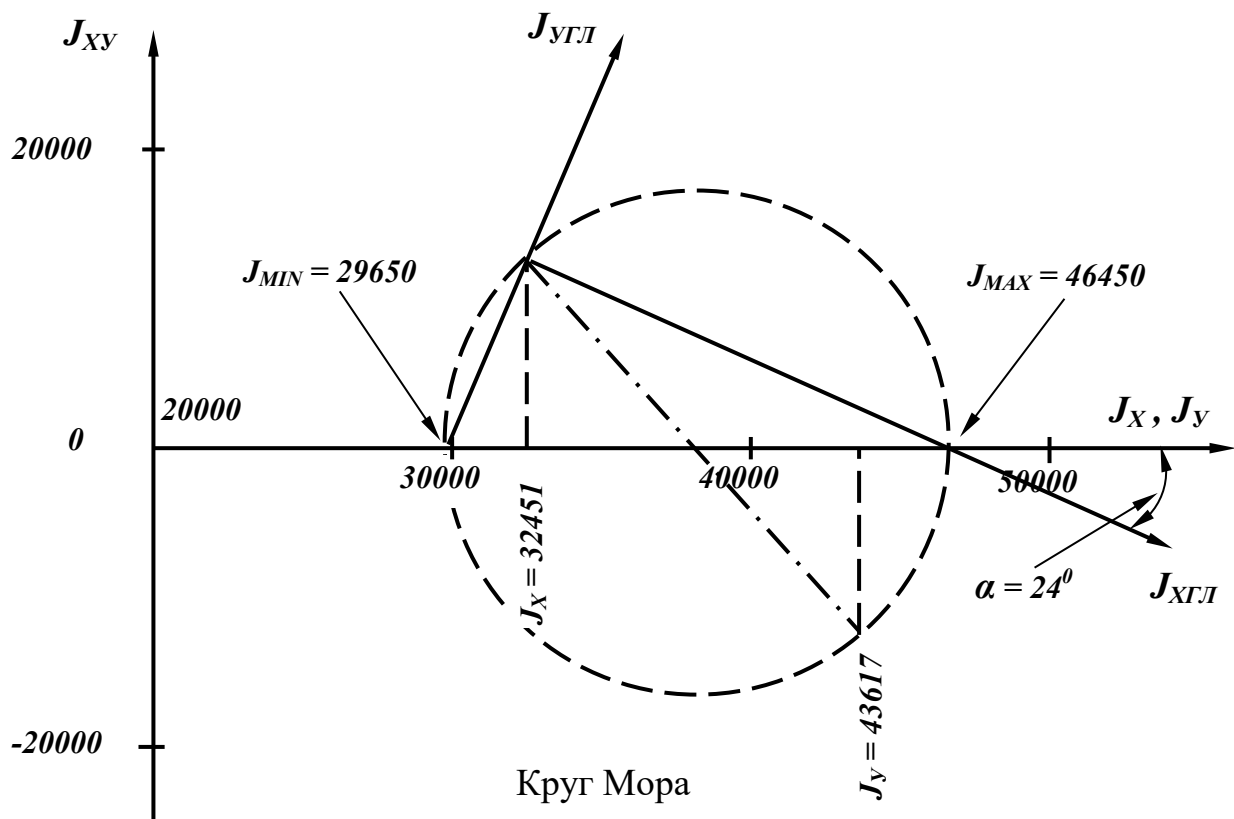
В ячейке **G11** определяется максимальный момент инерции сечения.

G11 Шрифт = =(M8+M9)/2+КОРЕНЬ(СТЕПЕНЬ((M8-M9)/2,2)+СТЕПЕНЬ(M10,2))														
1 Номер элемента	2 Характер элемента	3 Вид элемента	4 Размеры элемента, см		6 Площадь сечения, см ²	7 Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		9 Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		11 Моменты инерции элементов относительно собственных осей		12 Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
			5 высота (радиус)	8 ширина		10 оси X, см	11 оси Y, см	13 оси X _c , см	14 оси Y _c , см	15 оси X _i	16 оси Y _i	17 осевые		18 центробежный
												19 J _{Xc}	20 J _{Yc}	
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4	7912,5
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1	-6430,7
8 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _c						12,1	9 Осевой момент инерции относительно оси X _c				32451,3			
9 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _c						7,3	10 Осевой момент инерции относительно оси Y _c				43617,6			
10 Угол поворота главных осей сечения, градусы						24,2	11 Центробежный момент инерции относительно системы координатных осей X _c Y _c				6285,9			
11 Максимальный момент инерции сечения						46441,8								

В ячейке **M11** определяется минимальный момент инерции сечения.

M11 Шрифт = =(M8+M9)/2-КОРЕНЬ(СТЕПЕНЬ((M8-M9)/2,2)+СТЕПЕНЬ(M10,2))														
1 Номер элемента	2 Характер элемента	3 Вид элемента	4 Размеры элемента, см		6 Площадь сечения, см ²	7 Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		9 Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		11 Моменты инерции элементов относительно собственных осей		12 Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
			5 высота (радиус)	8 ширина		10 оси X, см	11 оси Y, см	13 оси X _c , см	14 оси Y _c , см	15 оси X _i	16 оси Y _i	17 осевые		18 центробежный
												19 J _{Xc}	20 J _{Yc}	
1	С	ПР	20	30	600,0	10,0	15,0	2,7	2,9	20000,0	45000,0	24423,6	50217,2	4804,1
2	С	ПР	10	8	80,0	-5,0	4,0	-12,3	-8,1	666,7	426,7	12739,84	5612,4	7912,5
3	В	КР	6		-113,1	13,0	22,0	5,7	9,9	-1017,9	-1017,9	-4712,12	-12212,1	-6430,7
8 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси Y - X _c						12,1	9 Осевой момент инерции относительно оси X _c				32451,3			
9 Координата положения центра тяжести сечения относительно оси X - Y _c						7,3	10 Осевой момент инерции относительно оси Y _c				43617,6			
10 Угол поворота главных осей сечения, градусы						24,2	11 Центробежный момент инерции относительно системы координатных осей X _c Y _c				6285,9			
11 Максимальный момент инерции сечения						46441,8	12 Минимальный момент инерции сечения				29627,1			

Результаты расчетов проверяются графически построением круга Мора.



3.3. Геометрические характеристики сечения, составленного из стандартных прокатных профилей

Необходимо разбить сечение на простейшие фигуры – стандартные прокатные профили, задаться начальным положением координатных осей, для выполнения основных расчетов рекомендуется принять следующую форму расчетной таблицы (табл. 6).

Таблица 6

Рекомендуемая форма расчетной таблицы определения геометрических характеристик сечения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
2			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	осевые		центробежный
3				J _{XI}	J _{YI}	J _{XIYI}					J _{Xc}	J _{Yc}	J _{XcYc}
4													
5													
6													
7													
8													

Рекомендуемый порядок работы при расчетах с таблицей предлагаемой формы следующий:

- заполняются столбцы, включающие исходные данные:
 - в ячейки столбца **B** вносится характеристика вида элементов, на которые разбито исходное плоское сечение:
 - швеллер с указанием номера – «**шв**(номер)»,
 - двутавр с указанием номера – «**дв**(номер)»,
 - равнобокий уголок с указанием номера – «**ур**(номер)»,
 - неравнобокий уголок с указанием номера – «**ун**(номер)»;
 - в ячейки столбца **C** вносятся значения величины площади элемента;
 - в ячейки столбцов **D**, **E**, **F** вносятся значения величины моментов инерции элементов относительно собственных центральных осей параллельных принятому начальному положению координатных осей,
 - в ячейки **G**, **H** вносятся значения координат расположения центра тяжести элемента относительно принятой системы координатных осей,
 - за пределами расчетной таблицы выделить две дополнительные расчетные ячейки, в которые ввести формулы для определения координат расположения центра тяжести сечения в принятой системе координат:
 - в ячейку для определения координаты центра тяжести сечения относительно оси X – координаты Y_C
- ⇒ **СУММПРОИЗВ** (ссылка на массив ячеек столбца **C**, включающий величину площадей отдельных элементов сечения; массив ячеек столбца **G**, включающий значения координат расположения центров тяжести отдельных элементов сечения относительно оси X) / **СУММ** (ссылка на массив ячеек столбца **C**, включающий величину площадей отдельных элементов сечения)

- в ячейку для определения координаты центра тяжести сечения относительно оси Y – координаты X_C
 \Rightarrow **СУММПРОИЗВ**(ссылка на **массив ячеек** столбца C , включающий величину площадей отдельных элементов сечения; ссылка на **массив ячеек** столбца H , включающий значения координат расположения центров тяжести отдельных элементов сечения относительно оси Y) / **СУММ** (ссылка на **массив ячеек** столбца C , включающий величину площадей отдельных элементов сечения),
- в ячейки столбцов I и J вводятся формулы определения координат положения центров тяжести отдельных элементов сечения относительно центральных осей:
 - в ячейку $I4$ формулу для определения координат относительно новой оси X_C
 \Rightarrow **G4** – абсолютная ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты Y_C ,
 - в ячейку $J4$ формулу для определения координат относительно новой оси Y_C
 \Rightarrow **H4** – абсолютная ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты X_C ,
- в ячейки столбцов K , L и M вводятся формулы для определения моментов инерции составных элементов сечения относительно центральных осей:
 - в ячейку $K4$ вводятся формула определения осевого момента инерции относительно оси X_C
 \Rightarrow $I4 + F4*СТЕПЕНЬ$ (ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси $Y_C;2$),
 - в ячейку $L4$ вводятся формула определения осевого момента инерции относительно оси Y_C
 \Rightarrow $J4 + F4*СТЕПЕНЬ$ (ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси $X_C;2$),
 - в ячейку $M4$ вводятся формула определения центробежного момента инерции относительно осей X_C и Y_C
 \Rightarrow $F4*$ ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси X_C *ссылка на адрес ячейки с подсчитанным значением координаты относительно оси Y_C ,
- за пределами расчетной таблицы выделить дополнительно шесть расчетных ячеек. В эти ячейки ввести формулы для определения: осевых и центробежного моментов инерции заданного сечения относительно центральных осей; угла, определяющего положения главных осей сечения, и главных моментов инерции сечения:
 - в ячейку, выделенную для определения осевого момента инерции сечения относительно центральной оси X_C , ввести формулу
 \Rightarrow **СУММ**(**массив ячеек** столбца K),

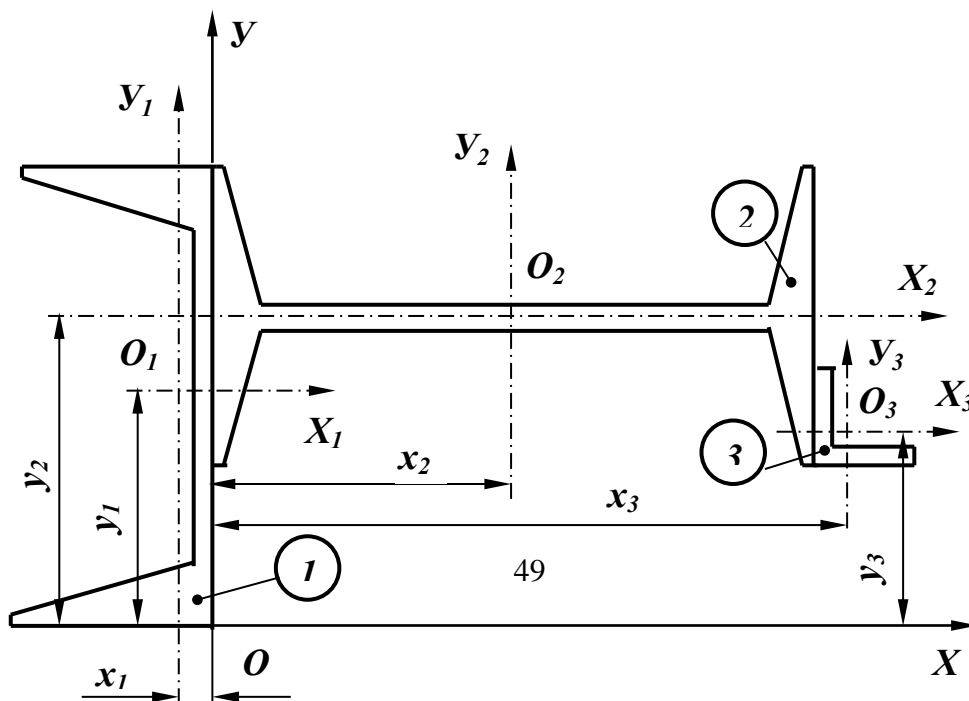
- в ячейку, выделенную для определения осевого момента инерции сечения относительно центральной оси U_C , ввести формулу
 \Rightarrow СУММ(массив ячеек столбца L),
- в ячейку, выделенную для определения центробежного момента инерции сечения относительно центральных осей X_C и U_C , ввести формулу
 \Rightarrow СУММ(массив ячеек столбца M),
- в ячейки, выделенные для определения угла поворота главных осей и главных моментов инерции, ввести формулы в соответствии с адресами ячеек, в которых подсчитаны осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей.

3.3.1. Пример определение геометрических характеристик сечения, составленного из стандартных прокатных профилей, - подкрановой балки.

Исходные данные

Вид элемента		Швеллер № 16	Двутавр № 20	Уголок № 3
Номер элемента		1	2	3
Площадь элемента, см ²		18,1	26,8	2,27
Моменты инерции относительно собственных осей, см ⁴	осевой относительно оси x_i	866,2	115	1,84
	осевой относительно оси y_i	73,3	1840	1,84
	центробежный	0	0	1,08
Координата положения центра тяжести в принятой системе координат, см	относительно оси X	8	11	6,89
	относительно оси U	- 1,8	10	20,89

Вид сечения



Решение:

В соответствующие ячейки столбцов *A – H* вносятся соответствующие исходные данные.

1	2	3	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые		центробежный
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}	
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80					
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00					
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89					
8													

В ячейку *G9* вводится формула определения координаты положения центра тяжести сечения относительно оси *X*.

G9 = СУММПРОИЗВ(C5:C7;G5:G7)/СУММ(C5:C7)													
1	2	3	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые		центробежный
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}	
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80					
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00					
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89					
8													
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _с						9,65						

В ячейку **G9** вводится формула определения координаты положения центра тяжести сечения относительно оси **У**.

G10 = СУММПРОИЗВ(C5:C7;H5:H7)/СУММ(C5:C7)												
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые	
J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}		J _{Xc}	J _{Yc}	J _{XcYc}						
2	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80				
3	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00				
4	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89				
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _с						9,65					
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _с						6,00					

В ячейку **I5** вводится формула определения координаты центра тяжести элемента относительно центральной оси **X_с**.

I5 = G5-\$G\$9												
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые	
J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}		J _{Xc}	J _{Yc}	J _{XcYc}						
2	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65			
3	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00				
4	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89				
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _с						9,65					
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _с						6,00					

Автозаполнением определяются значения искомых величин столбца **I**.

В ячейку **J5** вводится формула определения координаты центра тяжести элемента относительно центральной оси U_C .

J5 =H5-\$G\$10													
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	осевые		центробежный
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}	
2													
3													
4													
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80			
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35				
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76				
8													
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – U _C						9,65						
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _C						6,00						

Автозаполнением определяются значения искомых величин столбца **J**.

В ячейку **K5** вводится формула определения осевого момента инерции элемента сечения относительно оси X_C .

K5 =D5+C5*СТЕПЕНЬ(15,2)													
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения			
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	осевые		центробежный
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}	
2													
3													
4													
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54		
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00			
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89			
8													
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – U _C						9,65						
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _C						6,00						

Автозаполнением определяются остальные значения искомым величин столбца **K**.

В ячейку **L5** вводится формула определения осевого момента инерции элемента сечения относительно оси **У_С**.

L5		=E5+C5*СТЕПЕНЬ(J5,2)																				
1	2	3	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения												
			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13										
													Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	осевые		центробежный
													J _{XI}	J _{YI}	J _{X_{YI}}					J _{XС}	J _{YС}	
1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43											
2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77												
3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15												
Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _С						9,65																
Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _С						6,00																

Автозаполнением определяются остальные значения искомым величин столбца **L**.

В ячейку **M5** вводится формула определения центробежного момента инерции элемента сечения относительно системы координатных осей **XСУ**.

M5		=F5+C5*15*J5																				
1	2	3	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения												
			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13										
													Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _С , см	оси Y _С , см	осевые		центробежный
													J _{XI}	J _{YI}	J _{X_{YI}}					J _{XС}	J _{YС}	
1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98										
2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62											
3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38											
Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _С						9,65																
Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _С						6,00																

Автозаполнением определяются остальные значения искомых величин столбца *M*.

В ячейку *M9* вводится формула определения осевого момента сечения относительно оси X_C .

M9 = СУММ(K5:K7)													
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения				Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _C , см	оси Y _C , см	осевые		центробежный
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}	
													J _{XcYc}
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62	144,74
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38	-92,27
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _C				9,65		Осей момент инерции сечения относительно оси X _C				1098,45		
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _C				6,00								

В ячейку *M10* вводится формула определения осевого момента сечения относительно оси Y_C .

		M10 = СУММ(L5:L7)												
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения				
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые		центробежный	
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}		J _{XcYc}
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98	
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62	144,74	
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38	-92,27	
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _с						9,65	Осевой момент инерции сечения относительно оси X _с				1098,45		
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _с						6,00	Осевой момент инерции сечения относительно оси Y _с				3948,43		

В ячейку **M11** вводится формула определения центробежного момента сечения относительно системы координатных осей **XCY**.

		M11 = СУММ(M5:M7)												
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения				
			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые		центробежный	
				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}		J _{XcYc}
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98	
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62	144,74	
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38	-92,27	
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _с						9,65	Осевой момент инерции сечения относительно оси X _с				1098,45		
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _с						6,00	Осевой момент инерции сечения относительно оси Y _с				3948,43		
11								Центробежный момент инерции сечения относительно системы координатных осей XCY				285,46		

В ячейку **G11** вводится формула определения угла поворота главных осей.

G11 = ГРАДУСЫ(ATAN(2*M11/(M10-M9))/2)												
1 Номер элемента	2 Вид элемента	3 Геометрические характеристики сечения				4 Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		5 Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		6 Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
		7 Площадь, см ²	8 Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			9 оси X, см	10 оси Y, см	11 оси X _С , см	12 оси Y _С , см	13 осевые		14 центробежный
			15 J _{XI}	16 J _{YI}	17 J _{XIYI}					18 J _{XC}	19 J _{YC}	
5	1 шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98
6	2 дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62	144,74
7	3 ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38	-92,27
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _С					9,65		Осей момент инерции сечения относительно оси X _С			1098,45	
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _С					6,00		Осей момент инерции сечения относительно оси Y _С			3948,43	
11	Угол поворота главных осей, градусы					5,7		Центробежный момент инерции сечения относительно системы координатных осей XСУ			285,46	

В ячейку **G12** вводится формула определения максимального осевого момента инерции.

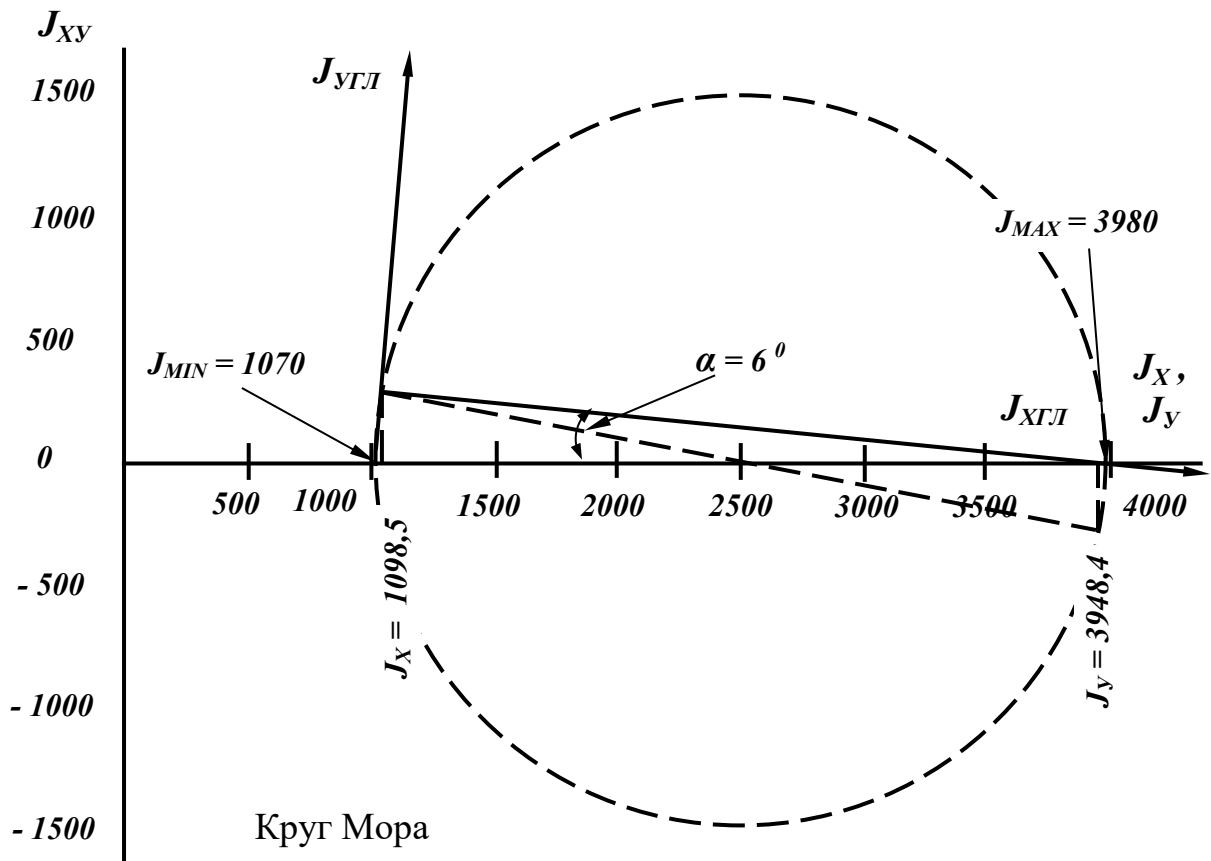
G12 = (M9+M10)/2+КОРЕНЬ(СТЕПЕНЬ((M9-M10)/2,2)+СТЕПЕНЬ(M11,2))												
1 Номер элемента	2 Вид элемента	3 Геометрические характеристики сечения				4 Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		5 Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		6 Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения		
		7 Площадь, см ²	8 Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			9 оси X, см	10 оси Y, см	11 оси X _С , см	12 оси Y _С , см	13 осевые		14 центробежный
			15 J _{XI}	16 J _{YI}	17 J _{XIYI}					18 J _{XC}	19 J _{YC}	
5	1 шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98
6	2 дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62	144,74
7	3 ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38	-92,27
9	Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _С					9,65		Осей момент инерции сечения относительно оси X _С			1098,45	
10	Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _С					6,00		Осей момент инерции сечения относительно оси Y _С			3948,43	
11	Угол поворота главных осей, градусы					5,7		Центробежный момент инерции сечения относительно системы координатных осей XСУ			285,46	
12	Максимальный осевой момент инерции сечения					3976,7						

В ячейку **M12** вводится формула определения минимального осевого момента инерции.

Окончательный вид расчетной таблицы и выполненных расчетов представлен ниже.

M12													=(M9+M10)/2-КОРЕНЬ(СТЕПЕНЬ((M9-M10)/2;2)+СТЕПЕНЬ(M11;2))	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	Номер элемента	Вид элемента	Геометрические характеристики сечения			Координаты центра тяжести элемента относительно начального положения осей		Координаты центра тяжести элемента относительно центральных осей сечения		Моменты инерции элементов относительно центральных осей сечения				
2			Площадь, см ²	Моменты инерции сечения, относительно собственных осей, см ⁴			оси X, см	оси Y, см	оси X _с , см	оси Y _с , см	осевые		центробежный	
3				J _{Xi}	J _{Yi}	J _{XiYi}					J _{Xc}	J _{Yc}		
4				J _{XcYc}										
5	1	шв_16	18,10	866,20	73,30	0,00	8,00	-1,80	-1,65	-7,80	915,54	1173,43	232,98	
6	2	дв_20	26,80	115,00	1840,00	0,00	11,00	10,00	1,35	4,00	163,77	2269,62	144,74	
7	3	ур_3	2,27	1,84	1,84	1,08	6,89	20,89	-2,76	14,89	19,15	505,38	-92,27	
8														
9			Координата центра тяжести сечения относительно оси X – Y _с				9,65		Осевой момент инерции сечения относительно оси X _с				1098,45	
10			Координата центра тяжести сечения относительно оси Y – X _с				6,00		Осевой момент инерции сечения относительно оси Y _с				3948,43	
11			Угол поворота главных осей, градусы				5,7		Центробежный момент инерции сечения относительно системы координатных осей X _с Y _с				285,46	
12			Максимальный осевой момент инерции сечения				3976,7		Максимальный осевой момент инерции сечения				1070,14	

Результаты расчетов проверяются графически построением круга Мора.



2. 4. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

При оценке необходимых размеров сечения конструктивных элементов рабочих органов сельскохозяйственных машин и технологического оборудования наиболее трудоемкими являются следующие вопросы:

- определение внутренних силовых факторов при действии на элементы конструкции системы внешних сил
- установление характера распределения внутренних силовых факторов по длине элемента.

4.1. Внутренние силовые факторы при продольных деформациях элемента конструкции (растяжение – сжатие)

Продольные деформации элементов конструкции возникают в том случае, когда для каждого поперечного сечения элемента система внешних сил приводится к главному вектору, действующему вдоль продольной оси элемента. В этом случае в поперечных сечениях элемента конструкции возникает внутренний силовой фактор – продольная сила N . Под действием продольных сил в элементе возникают деформации растяжения или сжатия.

Величина продольной силы для любого сечения элемента определяется как сумма проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, на продольную ось элемента:

$$N_j = \sum_{i=1}^j P_{xi},$$

где j – номер рассматриваемого сечения,

i – порядковый номер рассматриваемой силы P в ее проекции на продольную ось элемента x .

При определении продольной силы принято следующее правило знаков:

- продольная сила принимается со знаком плюс (+), если проекция внешней силы направлена от сечения,
- продольная сила принимается со знаком минус (–), если проекция внешней силы направлена к сечению.

Для решения задач по определению продольных сил и характера распределения их по длине рассматриваемого элемента рекомендуется подготовить две таблицы: одну с исходными данными и расчетную (табл. 7).

Таблица 7

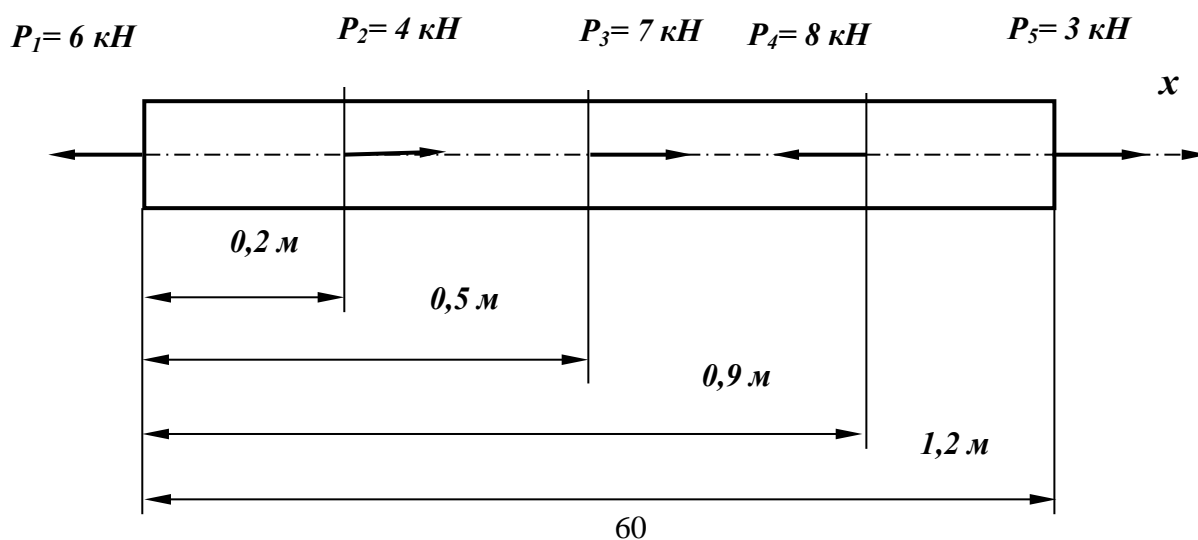
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Расчетная таблица				Исходные данные			
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина продольной силы, кН	Сечения приложения внешней нагрузки		Величина нагрузки, кН		
3				NN сечения			Координата, м	
4								
5								
6								

Порядок выполнения расчетов по определению продольных сил по длине конструктивного элемента рекомендуется следующий:

- заполняется таблица исходных данных;
- выполняются необходимые действия в расчетной таблице:
 - в ячейки столбца *A* вносится нумерация принятых расчетных сечений,
 - в ячейки столбца *B* вносятся координаты расчетных сечений, рекомендуется для каждого участка между сечениями приложения внешней нагрузки принимать два расчетных сечения: одно посередине участка, второе в непосредственной близости от дальнего сечения приложения внешней нагрузки для возможности правильного построения эпюры продольных сил по длине элемента, рекомендуется задать еще одно расчетное сечение в непосредственной близости первого сечения приложения нагрузки;
 - в ячейку *C4* столбца *C* вводится формула определения продольной внутренней силы;
 - по результатам расчетов в столбцах *B* и *C* строится точечный график распределения продольных сил по длине элемента – эпюра продольных сил.

4.1.1. Пример расчетов по определению продольных сил

Схема приложения внешней нагрузки



Решение

Заполняется таблица исходных данных

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчетная таблица				Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина продольной силы, кН		Сечения приложения внешней нагрузки		Величина нагрузки, кН
3					NN сечения	Координата, м	
4					1	0,0	6,0
5					2	0,2	4,0
6					3	0,5	7,0
7					4	0,9	8,0
8					5	1,2	3,0

В расчетную таблицу вносятся нумерация и координаты расчетных сечений

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчетная таблица				Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина продольной силы, кН		Сечения приложения внешней нагрузки		Величина нагрузки, кН
3					NN сечения	Координата, м	
4	1	-0,005					
5	2	0,000			1	0,0	6,0
6	3	0,100			2	0,2	4,0
7	4	0,195			3	0,5	7,0
8	5	0,200			4	0,9	8,0
9	6	0,250			5	1,2	3,0
10	7	0,495					
11	8	0,500					
12	9	0,700					
13	10	0,895					
14	11	0,900					
15	12	1,050					
16	13	1,195					
17	14	1,200					

В ячейку **C4** вводится формула определения продольной силы с учетом расчетной схемы. При этом адресные ссылки на исходные данные должны быть абсолютными.

В рассматриваемом случае формула будет иметь вид:

⇒ **ЕСЛИ(B4<\$F\$5; 0; ЕСЛИ(B4<\$F\$6; \$G\$5; ЕСЛИ(B4<\$F\$7; \$G\$5 - \$G\$6; ЕСЛИ(B4 <\$F\$8; \$G\$5-\$G\$6-\$G\$7; ЕСЛИ(B4<\$F\$9; \$G\$5-\$G\$6 - \$G\$7+\$G\$8;; \$G\$5-\$G\$6-\$G\$7+\$G\$8-\$G\$9))))**

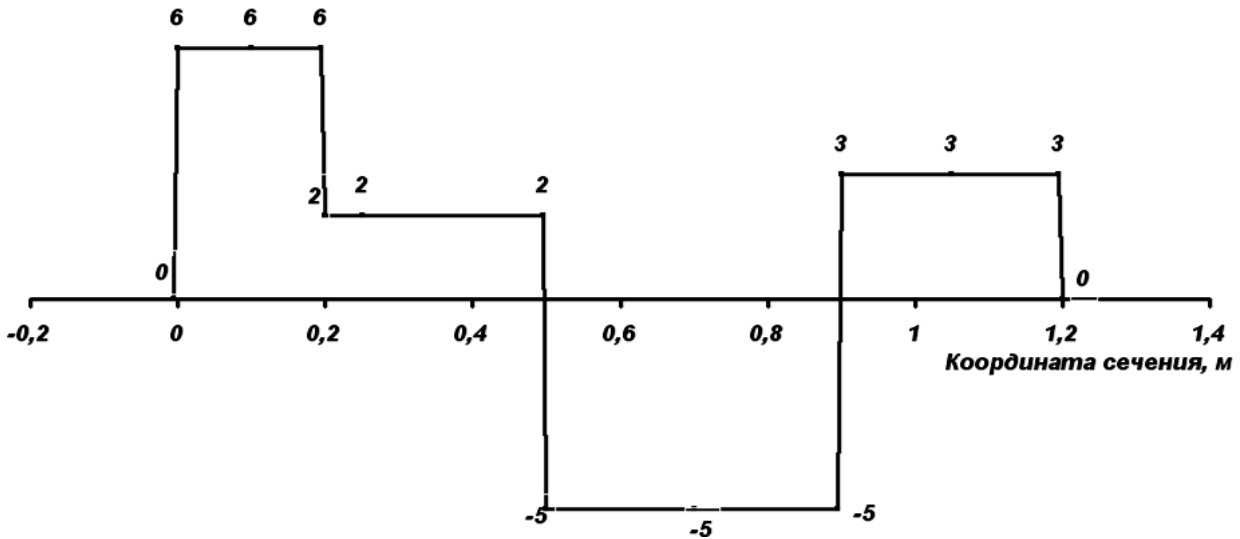
C4		=ЕСЛИ(В4<0;0;ЕСЛИ(В4<\$F\$6;\$G\$5;ЕСЛИ(В4<\$F\$7;\$G\$5-\$G\$6;ЕСЛИ(В4<\$F\$8;\$G\$5-\$G\$6-\$G\$7;ЕСЛИ(В4<\$F\$9;\$G\$5-\$G\$6-\$G\$7+\$G\$8;\$G\$5-\$G\$6-\$G\$7+\$G\$8-\$G\$9))))))				
A		Расчетная таблица			Исходные данные	
1	NN пп	Координата сечения, м	Величина продольной силы, кН	Сечения приложения внешней нагрузки		Величина нагрузки, кН
2				NN сечения	Координата, м	
3						
4	1	-0,005	0			
5	2	0,000		1	0,0	6,0
6	3	0,100		2	0,2	4,0
7	4	0,195		3	0,5	7,0
8	5	0,200		4	0,9	8,0
9	6	0,250		5	1,2	3,0
10	7	0,495				
11	8	0,500				
12	9	0,700				
13	10	0,895				
14	11	0,900				
15	12	1,050				
16	13	1,195				
17	14	1,200				

Автозаполнением столбца C определяются величины продольной силы для остальных сечений.

A		B	C	D	E	F	G
1		Расчетная таблица			Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина продольной силы, кН	Сечения приложения внешней нагрузки		Величина нагрузки, кН	
3				NN сечения	Координата, м		
4	1	-0,005	0				
5	2	0,000	6		1	0,0	6,0
6	3	0,100	6		2	0,2	4,0
7	4	0,195	6		3	0,5	7,0
8	5	0,200	2		4	0,9	8,0
9	6	0,250	2		5	1,2	3,0
10	7	0,495	2				
11	8	0,500	-5				
12	9	0,700	-5				
13	10	0,895	-5				
14	11	0,900	3				
15	12	1,050	3				
16	13	1,195	3				
17	14	1,200	0				

По данным столбцов *B* и *C* с использованием точечного графика *Мастера диаграмм* строится эпюра продольных сил.

Эпюра продольных сил, кН



4.2. Внутренние силовые факторы при деформациях кручения элемента конструкции

Деформации кручения элементов конструкции возникают в том случае, когда для каждого поперечного сечения элемента система внешних сил приводится к главному моменту, действующему в плоскости поперечного сечения элемента. В этом случае в поперечных сечениях элемента конструкции возникает внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{кр}$.

Величина крутящего момента для любого сечения элемента определяется как сумма проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, на продольную ось элемента.

$$M_{крj} = \sum_{i=1}^j M_{oi},$$

где j – номер рассматриваемого сечения,

i – порядковый номер момента внешней рассматриваемой силы P_i относительно продольной оси элемента.

При деформации кручения осуществляется передача вращающего момента по длине элемента конструкции, поэтому за правило знаков рекомендуется принять следующее:

□ положительным принимается момент, передающий мощность на элемент конструкции,

□ отрицательным принимается момент, снимающий мощность с элемента конструкции.

Для решения задач по построению эпюр крутящих моментов рекомендуется подготовить две таблицы: одну с исходными данными и расчетную (табл.8).

Таблица 8

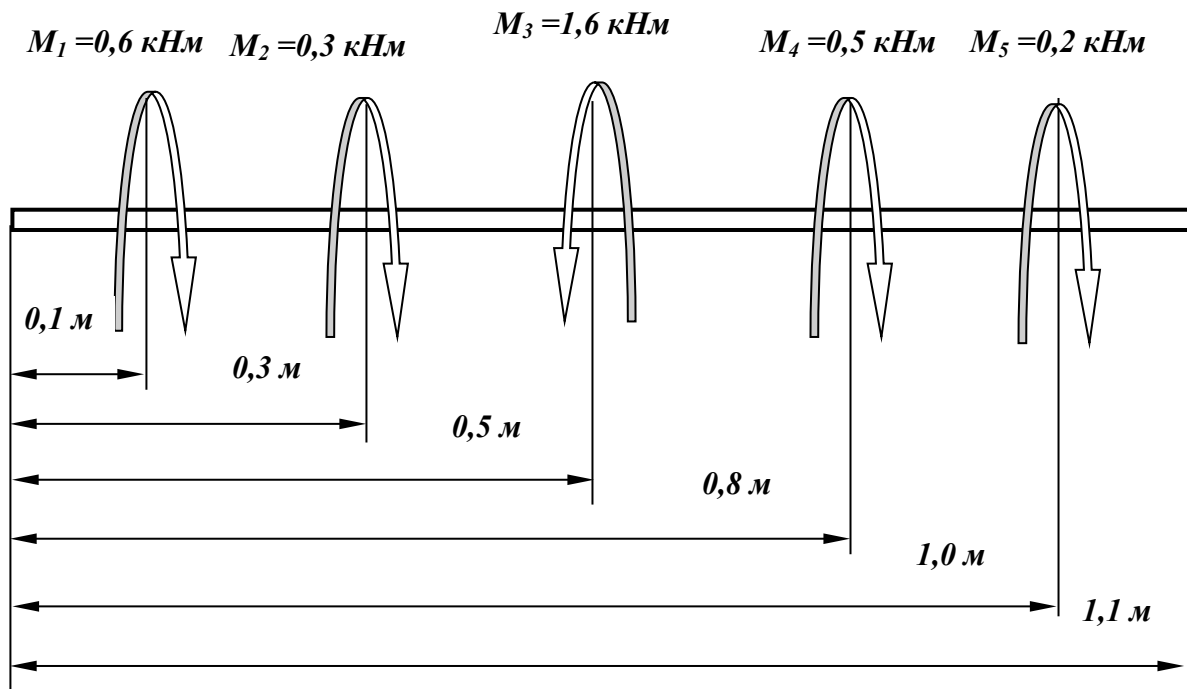
	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчетная таблица				Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина крутящего момента, кНм		Сечения приложения внешнего вращающего момента		Величина вращающего момента, кНм
3					NN сечения	Координата, м	
4							
5							
6							

Порядок выполнения расчетов по определению продольных сил по длине конструктивного элемента рекомендуется следующий:

- заполняется таблица исходных данных;
- выполняются необходимые действия в расчетной таблице:
 - в ячейки столбца **A** вносятся нумерация принятых расчетных сечений,
 - в ячейки столбца **B** вносятся координаты расчетных сечений: рекомендуется помимо сечений приложения внешних вращающих моментов задавать дополнительно сечения в непосредственной близости сечений приложения внешних моментов;
 - в ячейку **C4** столбца **C** вводится формула определения крутящего момента;
 - по результатам расчетов в столбцах **B** и **C** строится точечный график распределения крутящего момента по длине элемента – эпюра крутящих моментов.

4.2.1. Пример расчетов по определению крутящих моментов

Схема приложения внешней нагрузки



Решение

Заполняется таблица исходных данных

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчетная таблица				Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина крутящего момента, кНм	Сечения приложения внешнего вращающего момента		Величина вращающего момента, кНм	
3				NN сечения	Координата, м		
4				0	0,00	0,00	
5				1	0,10	-0,60	
6				2	0,30	-0,30	
7				3	0,50	1,60	
8				4	0,80	-0,50	
9				5	1,00	-0,20	
10				6	1,10	0,00	

В расчетную таблицу вносится нумерация и координаты расчетных сечений

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчетная таблица				Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина крутящего момента, кНм		Сечения приложения внешнего вращающего момента		Величина вращающего момента, кНм
3				NN сечения	Координата, м		
4	0	0,000			0	0,00	0,00
5	1	0,095			1	0,10	-0,60
6	2	0,100			2	0,30	-0,30
7	3	0,295			3	0,50	1,60
8	4	0,300			4	0,80	-0,50
9	5	0,495			5	1,00	-0,20
10	6	0,500			6	1,10	0,00
11	7	0,795					
12	8	0,800					
13	9	0,995					
14	10	1,000					
15	11	1,100					

В ячейку C4 вводится формула определения крутящего с учетом расчетной схемы. При этом адресные ссылки на исходные данные должны быть абсолютными.

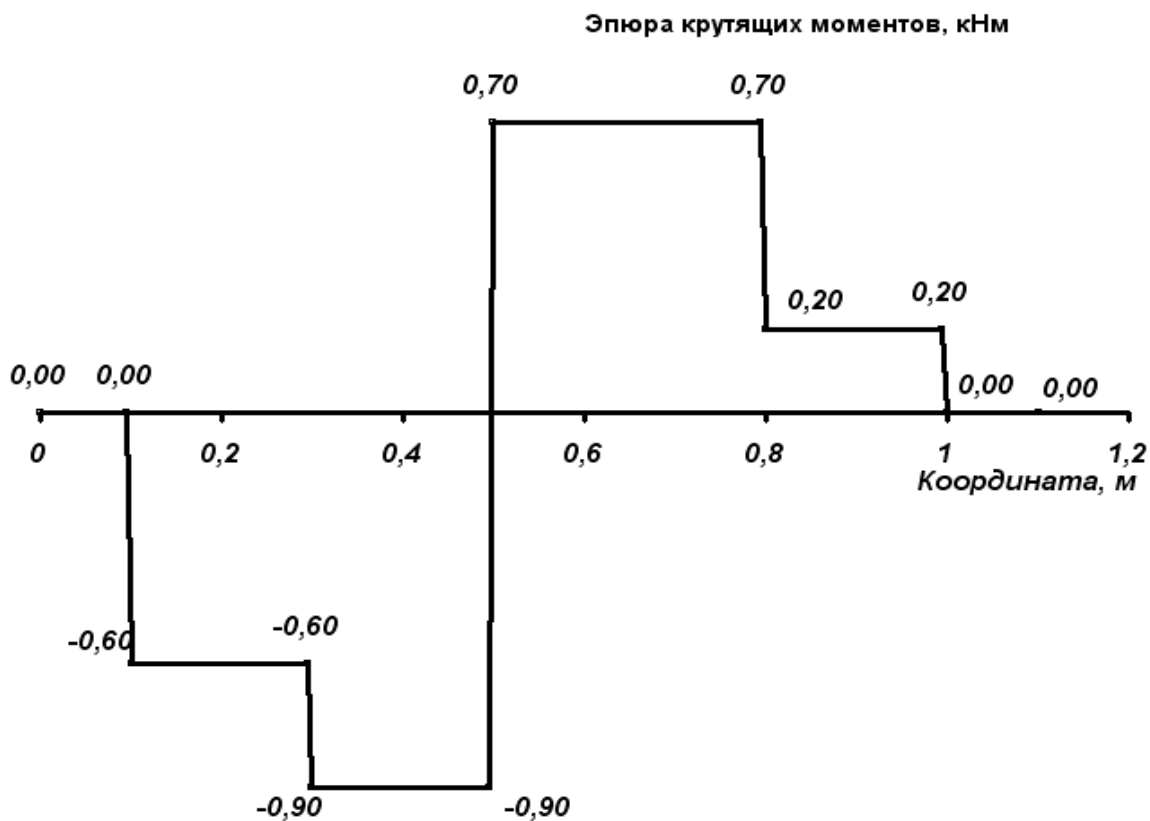
⇒ ЕСЛИ(B4<F\$5; G\$4; ЕСЛИ(B4<F\$6; G\$4+G\$5; ЕСЛИ(B4 < F\$7; G\$4+G\$5+G\$6; ЕСЛИ(B4<F\$8; G\$4+G\$5+G\$6+G\$7; ЕСЛИ(B4<F\$9; G\$4+G\$5+G\$6+G\$7+G\$8; G\$4 + G\$5 + G\$6 + G\$7 +G\$8+G\$9))))))

1		Расчетная таблица		Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина крутящего момента, кНм	Сечения приложения внешнего вращающего момента		Величина вращающего момента, кНм
				3	NN сечения	
4	0	0,000	0,00	0	0,00	0,00
5	1	0,095		1	0,10	-0,60
6	2	0,100		2	0,30	-0,30
7	3	0,295		3	0,50	1,60
8	4	0,300		4	0,80	-0,50
9	5	0,495		5	1,00	-0,20
10	6	0,500		6	1,10	0,00
11	7	0,795				
12	8	0,800				
13	9	0,995				
14	10	1,000				
15	11	1,100				

Автозаполнением столбца *C* определяются величины крутящего момента для остальных сечений.

1		Расчетная таблица		Исходные данные		
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина крутящего момента, кНм	Сечения приложения внешнего вращающего момента		Величина вращающего момента, кНм
				3	NN сечения	
4	0	0,000	0,00	0	0,00	0,00
5	1	0,095	0,00	1	0,10	-0,60
6	2	0,100	-0,60	2	0,30	-0,30
7	3	0,295	-0,60	3	0,50	1,60
8	4	0,300	-0,90	4	0,80	-0,50
9	5	0,495	-0,90	5	1,00	-0,20
10	6	0,500	0,70	6	1,10	0,00
11	7	0,795	0,70			
12	8	0,800	0,20			
13	9	0,995	0,20			
14	10	1,000	0,00			
15	11	1,100	0,00			

По данным столбцов *B* и *C* с использованием точечного графика *Мастера диаграмм* строится эпюра крутящих моментов.



4.3. Внутренние силовые факторы при плоском поперечном изгибе элемента конструкции

Деформация поперечного изгиба элемента конструкции возникает в том случае, для каждого поперечного сечения элемента в плоскости, проходящей через продольную ось и главную ось сечения, возникают под действием системы внешних сил внутренние силовые факторы в виде главного вектора – перерезывающей силы Q и главного момента – изгибающего момента $M_{из}$.

Величина перерезывающей силы для любого сечения элемента конструкции равна сумме проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, на главную ось сечения.

Величина изгибающего момента для любого сечения элемента конструкции равна сумме моментов всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, относительно оси сечения, перпендикулярной плоскости действия внешних сил.

Для определения внутренних силовых факторов при изгибе рекомендуется следующее правило знаков:

□ Перерезывающая сила принимается положительной, если вызывающая ее внешняя сила стремится повернуть по часовой стрелке рассматриваемую часть элемента конструкции относительно центра сечения.

Перерезывающая сила принимается отрицательной, если вызывающая ее внешняя сила стремится повернуть против часовой стрелки рассматриваемую часть элемента конструкции.

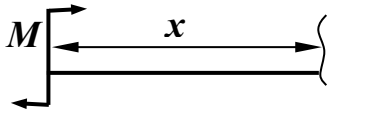
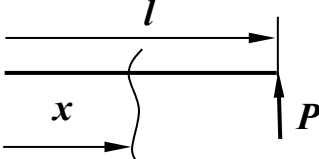
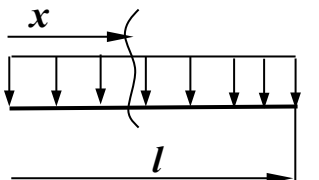
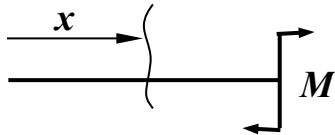
□ Изгибающий момент принимается положительным, если вызывающий его внешний силовой фактор изгибает рассматриваемую часть элемента конструкции так, что выпуклость изогнутой оси располагается внизу.

Изгибающий момент принимается отрицательным, если вызывающий его внешний силовой фактор изгибает рассматриваемую часть элемента конструкции так, что выпуклость изогнутой оси располагается вверху.

Формулы для определения внутренних силовых факторов в расчетных сечениях при изгибе с учетом характера внешней нагрузки приведены в ниже следующей таблице.

<i>Внешняя нагрузка</i>	<i>Перерезывающая сила</i>		<i>Изгибающий момент</i>	
	<i>знак</i>	<i>формула</i>	<i>знак</i>	<i>формула</i>
	-	$Q = -P$	-	$M_{из} = -Px$
	+	$Q = P$	+	$M_{из} = P(x-a)$
	-	$Q = -qx$	-	$M_{из} = -qx^2/2$
	-	$Q = -qa$	-	$M_{из} = -qa(x - a/2)$
	-	$Q = -q(x-a)$	-	$M_{из} = -q(x-a)^2/2$

Продолжение табл.

Внешняя нагрузка	Перерезывающая сила		Изгибающий момент	
	знак	формула	знак	формула
		$Q = 0$	+	$M_{из} = M$
	-	$Q = -P$	+	$M_{из} = P(l - x)$
	+	$Q = q(l - x)$	-	$M_{из} = -q(l - x)^2 / 2$
	-	$Q = 0$	-	$M_{из} = M$

Порядок выполнения расчетов для построения эпюр внутренних силовых факторов при изгибе рекомендуется следующим:

- определяются опорные реакции (см. пункт 2.1.4.);
- вычерчивается схема действия внешних сил на элемент конструкции с учетом найденных расчетом опорных реакций;
- подготавливается таблицы исходных данных и расчетная, для которых рекомендуется следующая форма (табл. 9)

Таблица 9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Расчетная таблица				Исходные данные				
2					Внешняя нагрузка				
3	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм		Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки
4							начало	конец	
5									
6									
7									

□ заполняется таблица исходных данных, во внешние нагрузки при этом необходимо включать найденные значения опорных реакций; обозначение вида внешней нагрузки рекомендуется принять следующим:

- сосредоточенная сила \Rightarrow « *СС* »,
- распределенная нагрузка \Rightarrow « *РН* »,
- сосредоточенный момент \Rightarrow « *СМ* »;

□ в расчетную таблицу в столбцы *A* и *B* вводятся координаты расчетных сечений; в качестве координат расчетных сечений необходимо включать: все координаты приложения внешней нагрузки, в зонах действия сосредоточенных нагрузок – координаты сечений практически близких к сечению приложения внешней нагрузки, в зонах действия распределенных нагрузок: два – три дополнительных промежуточных сечений, а так же в случае перемены знака перерезывающей силы на расчетном участке координату сечения, в котором изгибающий момент принимает экстремальное значение.

Координату сечения с экстремальным значением изгибающего момента определяется из условия

$$Q = 0;$$

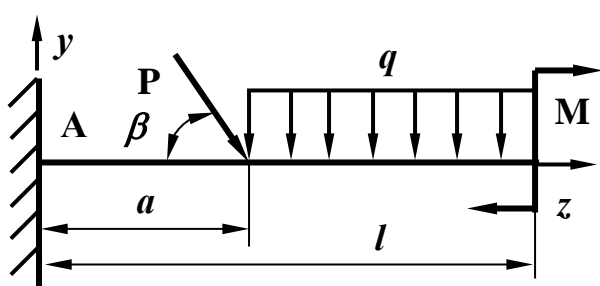
□ в столбец *C* расчетной таблицы вводится формула определения перерезывающей силы и автозаполнением определяются величины перерезывающей силы для выбранных расчетных сечений;

□ в случае, когда на участках действия распределенных нагрузок перерезывающая сила меняет знак, определяется координата сечения с экстремальным значением изгибающего момента и в координаты расчетных сечений (столбцы *A* и *B*) дополнительно вводится значение координаты сечения с экстремальным значением изгибающего момента;

□ по результатам расчетов строятся эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов.

4.3.1. Примеры расчетов по определению внутренних силовых факторов при плоском изгибе

4.3.1.1. Построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов для консольной балки с жестким защемлением при заданной активной нагрузке



Исходные данные:
 сосредоточенная нагрузка $P=6$ кН,
 распределенная нагрузка $q=2$ кН/м,
 сосредоточенный момент $M=3$ кНм,
 линейные размеры:
 $a = 3$ м, $l = 5$ м,
 угол с осью $z - \beta = 60^\circ$.

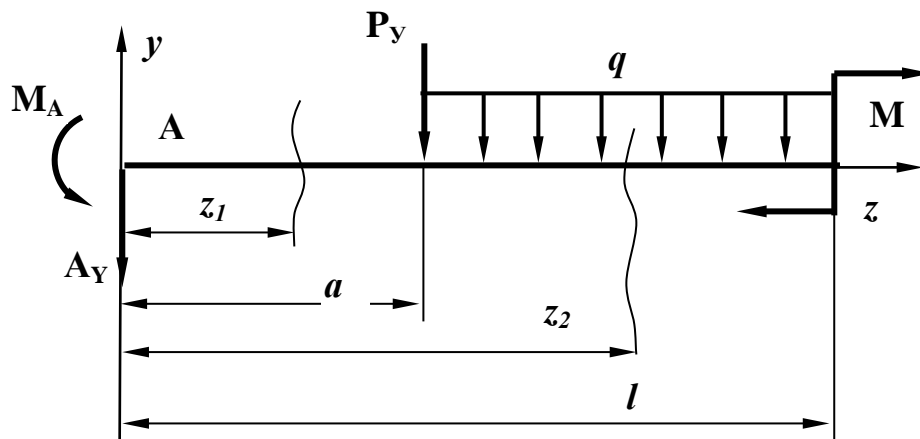
Решение:

Определение опорных реакций для указанной балки приведено в пункте 2.4.1.1., величина реакций составляет:

опорный момент – $M_A = 34,59$ кНм,

вертикальная составляющая опорной реакции – $A_Y = -9,20$ кН.

Вычерчивается расчетная схема для определения перерезывающих сил и изгибающих моментов



$$P_Y = 5,20 \text{ кН}$$

Заполняется таблица исходных данных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Расчетная таблица				Исходные данные				
2					Внешняя нагрузка				
3	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм		Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки
4							начало	конец	
5						сн	0		-9,20
6						см	0		34,59
7						сн	3		5,20
8						рн	3	5	2,00
9						см	5		3,00

В столбцы **A** и **B** вводится величина расчетных координат.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Расчетная таблица						Исходные данные		
2							Внешняя нагрузка		
3	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм		Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки
4							начало	конец	
5		-0,010				сн	0		-9,20
6		0,000				см	0		34,59
7		1,500				сн	3		5,20
8		2,990				рн	3	5	2,00
9		3,000				см	5		3,00
10		3,500							
11		4,000							
12		4,500							
13		4,990							
14		5,000							

В ячейку **C5** вводится формула для определения перерезывающей силы. В каждом случае формула должна соответствовать расчетной схеме
Для приведенной расчетной схемы формула имеет вид

⇒ **ЕСЛИ(B5<\$G\$5; 0; ЕСЛИ(B5<\$G\$8; -\$I\$5; -\$I\$7*(\$G\$9-B5))**)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Расчетная таблица						Исходные данные		
2							Внешняя нагрузка		
3	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм		Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки
4							начало	конец	
5		-0,010	0,00			сн	0		-9,20
6		0,000				см	0		34,59
7		1,500				сн	3		5,20
8		2,990				рн	3	5	2,00
9		3,000				см	5		3,00
10		3,500							
11		4,000							
12		4,500							
13		4,990							
14		5,000							

Автозаполнением определяются величины перерезывающих сил для всех расчетных сечений.

На участке действия распределенной нагрузки перерезывающая сила не меняет знака, поэтому нет необходимости включать дополнительные сечения.

В ячейку **D5** вводится формула для определения изгибающего момента. В каждом случае формула должна соответствовать расчетной схеме.

Для приведенной расчетной схемы формула имеет вид

$$\Rightarrow \text{ЕСЛИ}(B5 < G\$5; 0; \text{ЕСЛИ}(B5 < G\$8; -I\$6 - I\$5 * B5; -I9 - I\$7 * \text{СТЕПЕНЬ}(G\$9 - B5; 2) / 2))$$

D5		=ЕСЛИ(B5<G\$5;0;ЕСЛИ(B5<G\$7;-\$I\$6-\$I\$5*B5;-\$I\$9-\$I\$8*СТЕПЕНЬ(G\$9-B5;2)/2))								
Расчетная таблица				Исходные данные						
				Внешняя нагрузка						
NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм	Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки			
					начало	конец				
5	-0,010	0,00	0,00	сн	0		-9,20			
6	0,000	9,20		см	0		34,59			
7	1,500	9,20		сн	3		5,20			
8	2,990	9,20		рн	3	5	2,00			
9	3,000	4,00		см	5		3,00			
10	3,500	3,00								
11	4,000	2,00								
12	4,500	1,00								
13	4,990	0,02								
14	5,000	0,00								

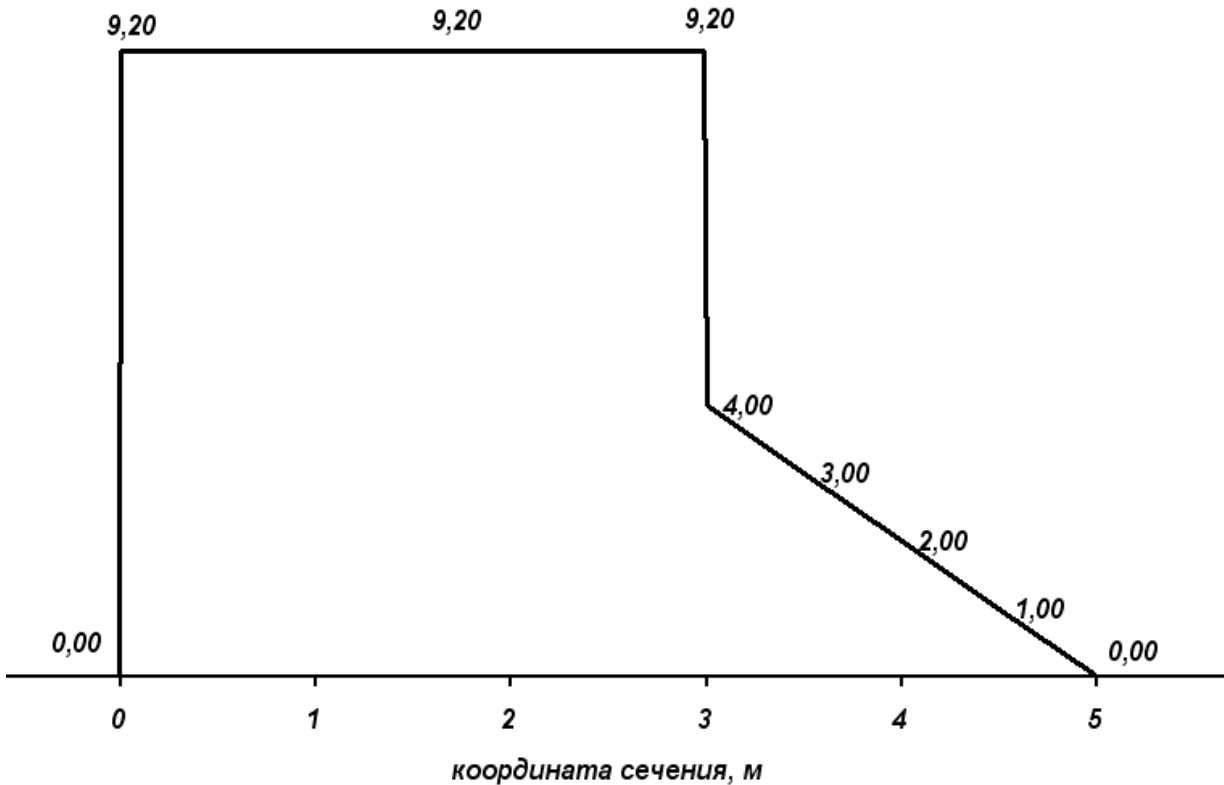
Автозаполнением определяются величины изгибающего момента для всех расчетных сечений.

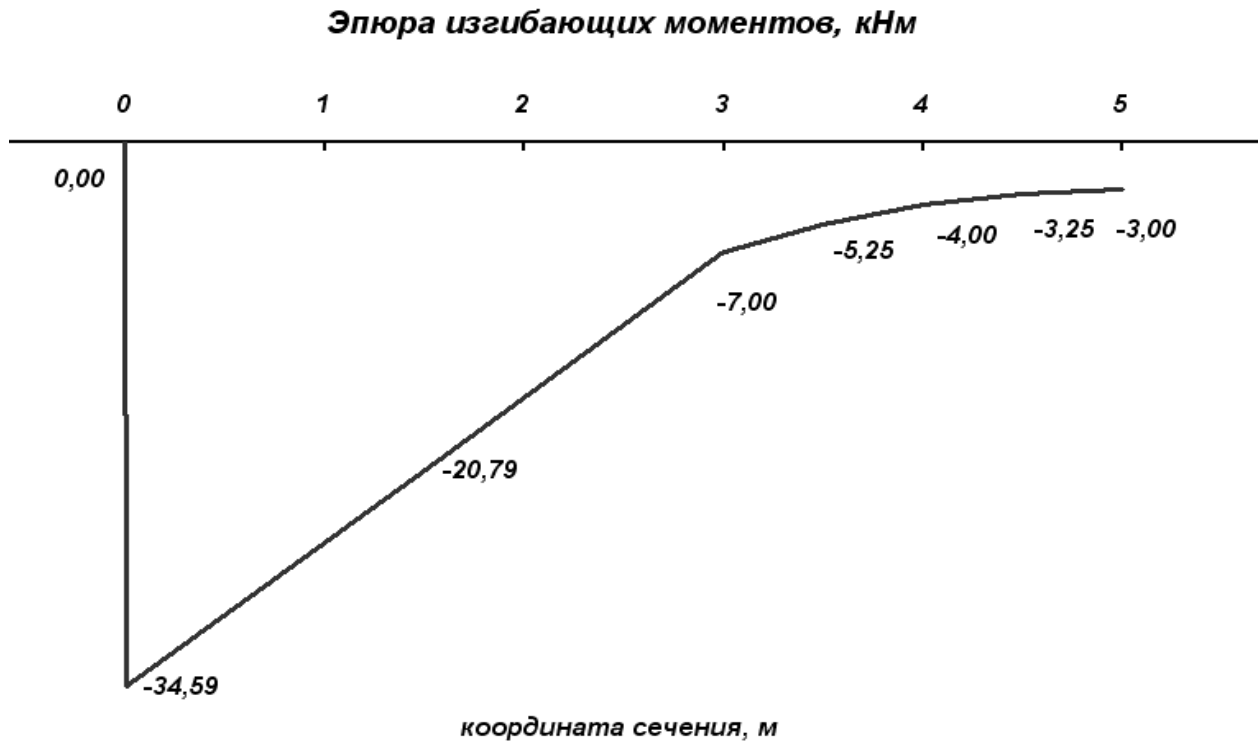
По данным столбцов **B** и **C** строится эпюра перерезывающих сил.

По данным столбцов **B** и **D** строится эпюра изгибающих моментов.

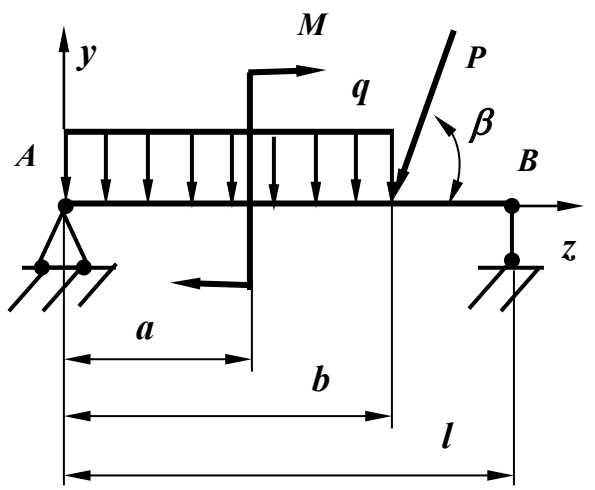
1	Расчетная таблица				Исходные данные			
2	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм	Внешняя нагрузка			
3					Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки
						4	начало	
5		-0,010	0,00	0,00	сн	0		-9,20
6		0,000	9,20	-34,59	см	0		34,59
7		1,500	9,20	-20,79	сн	3		5,20
8		2,990	9,20	-7,08	рн	3	5	2,00
9		3,000	4,00	-7,00	см	5		3,00
10		3,500	3,00	-5,25				
11		4,000	2,00	-4,00				
12		4,500	1,00	-3,25				
13		4,990	0,02	-3,00				
14		5,000	0,00	-3,00				

Эпюра перерезывающих сил, кН





4.3.1.2. Построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов для балки, лежащей на двух шарнирных опорах: подвижной и неподвижной, при заданной активной нагрузке



Исходные данные:

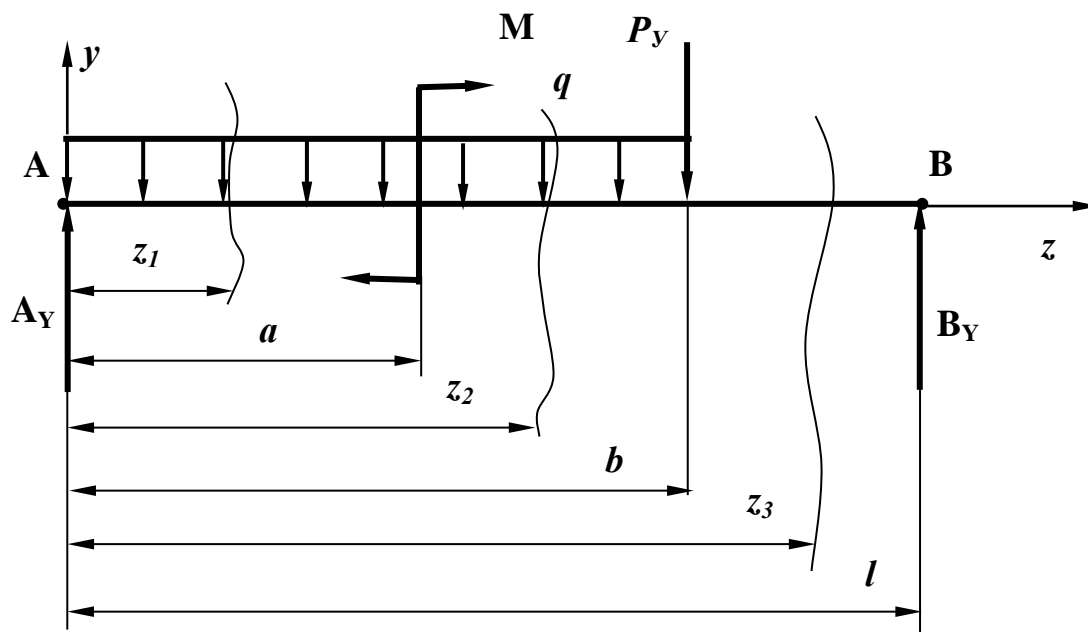
сосредоточенная нагрузка $P=8$ кН,
 распределенная нагрузка $q=2$ кН/м,
 сосредоточенный момент $M=5$ кНм,
 линейные размеры:
 $a = 2$ м, $b=5$ м; $l = 8$ м,
 угол с осью $z - \beta = 75^\circ$.

Решение:

Определение опорных реакций для указанной балки приведено в пункте 2.4.1.2., величина реакций составляет:

вертикальная составляющая опорной реакции – $A_Y = 9,15$ кН,
 вертикальная составляющая опорной реакции – $B_Y = 8,58$ кН.

Вычерчивается расчетная схема для определения перерезывающих сил и изгибающих моментов



$$P_y = 7,73 \text{ кН}$$

Заполняется таблица исходных данных

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Расчетная таблица				Исходные данные				
2					Внешняя нагрузка				
3	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм		Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки
4							начало	конец	
5						сн	0		9,15
6						рн	0	5	2,00
7						см	2		5,00
8						сн	5		7,73
9						сн	8		8,58

В столбцы *A* и *B* вводится нумерация и координаты расчетных сечений.

В ячейку **C5** расчетной таблицы с учетом данных выше рекомендаций вводится формула для определения перерезывающей силы. Для рассматриваемого примера формула будет иметь вид

$$\Rightarrow \text{ЕСЛИ}(B5 < \$G\$5; 0; \text{ЕСЛИ}(B5 < \$H\$6; \$I\$5 - \$I\$6*B5; \text{ЕСЛИ}(B5 < \$G\$8; -\$I\$9; 0)))$$

Автозаполнением определяется величина перерезывающих сил для всех расчетных сечений

C5		=ЕСЛИ(B5<\$G\$5;0;ЕСЛИ(B5<\$H\$6; \$I\$5-\$I\$6*B5;ЕСЛИ(B5<\$G\$8;-\$I\$9;0)))								
2	A	B	C	D	E	F	Внешняя нагрузка			
							G	H	I	
										Координата сечения приложения нагрузки
3	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм		Вид нагрузки	начало	конец		
4										
5	0	-0,010	0,00			сн	0		9,15	
6	1	0,000	9,15			рн	0	5	2,00	
7	2	1,000	7,15			см	2		5,00	
8	3	1,990	5,17			сн	5		7,73	
9	4	2,000	5,15			сн	8		8,58	
10	5	3,000	3,15							
11	6	4,000	1,15							
12	7	4,995	-0,84							
13	8	5,000	-8,58							
14	9	6,000	-8,58							
15	10	7,000	-8,58							
16	11	7,990	-8,58							
17	12	8,000	0,00							

Знак перерезывающей силы меняется на участке ее действия. Значит в пределах этого участка изгибающий момент будет иметь экстремальное значение.

Выделяется дополнительная ячейка для определения координаты с экстремальным значением изгибающего момента по формуле

$$\Rightarrow X = \$I\$5 / \$I\$6$$

В ячейку **D5** расчетной таблицы с учетом данных выше рекомендаций вводится формула для определения изгибающего момента. Для рассматриваемого примера формула будет иметь вид

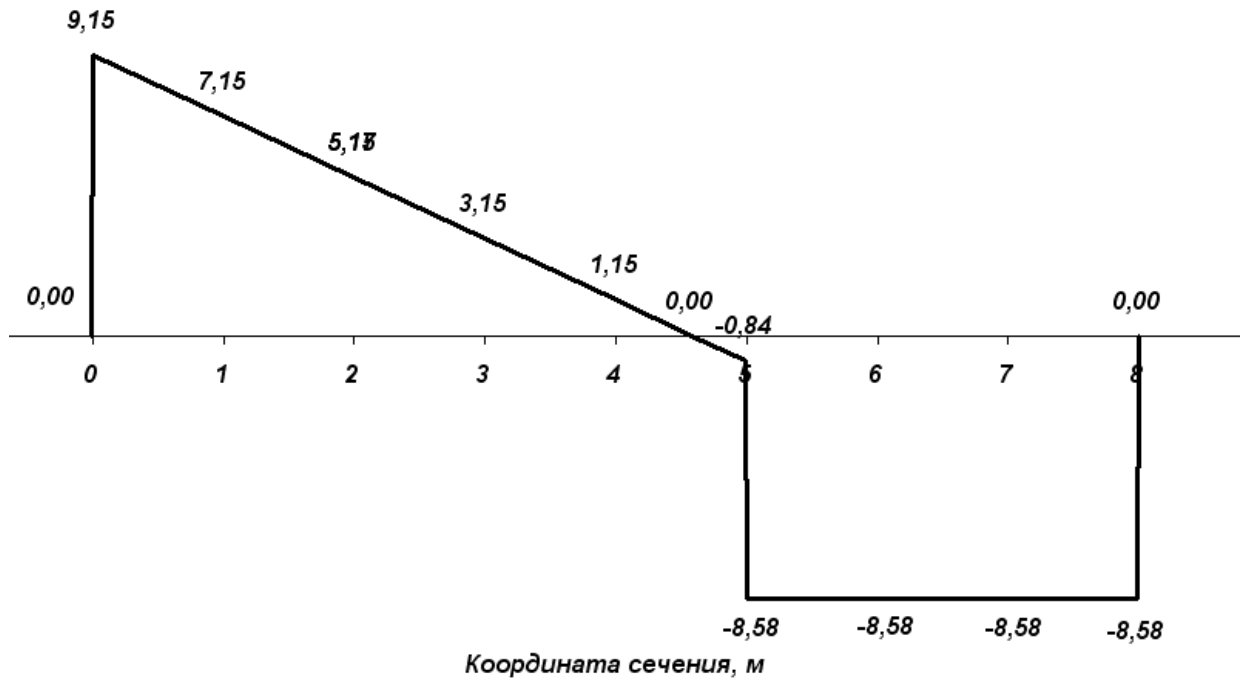
⇒ **ЕСЛИ (B5 < \$G\$5; 0; ЕСЛИ (B5 < \$G\$7; \$I\$5*B5 – СТЕПЕНЬ (B5; 2) / 2 * \$I\$6; ЕСЛИ (B5 < \$G\$8; \$I\$5 * B5 – СТЕПЕНЬ (B5; 2) / 2*\$I\$6 + \$I\$7; ЕСЛИ (B5 < \$G\$9; \$I\$9*(G\$9-B5); 0))))).**

Автозаполнением определяется величина изгибающего момента для всех расчетных сечений

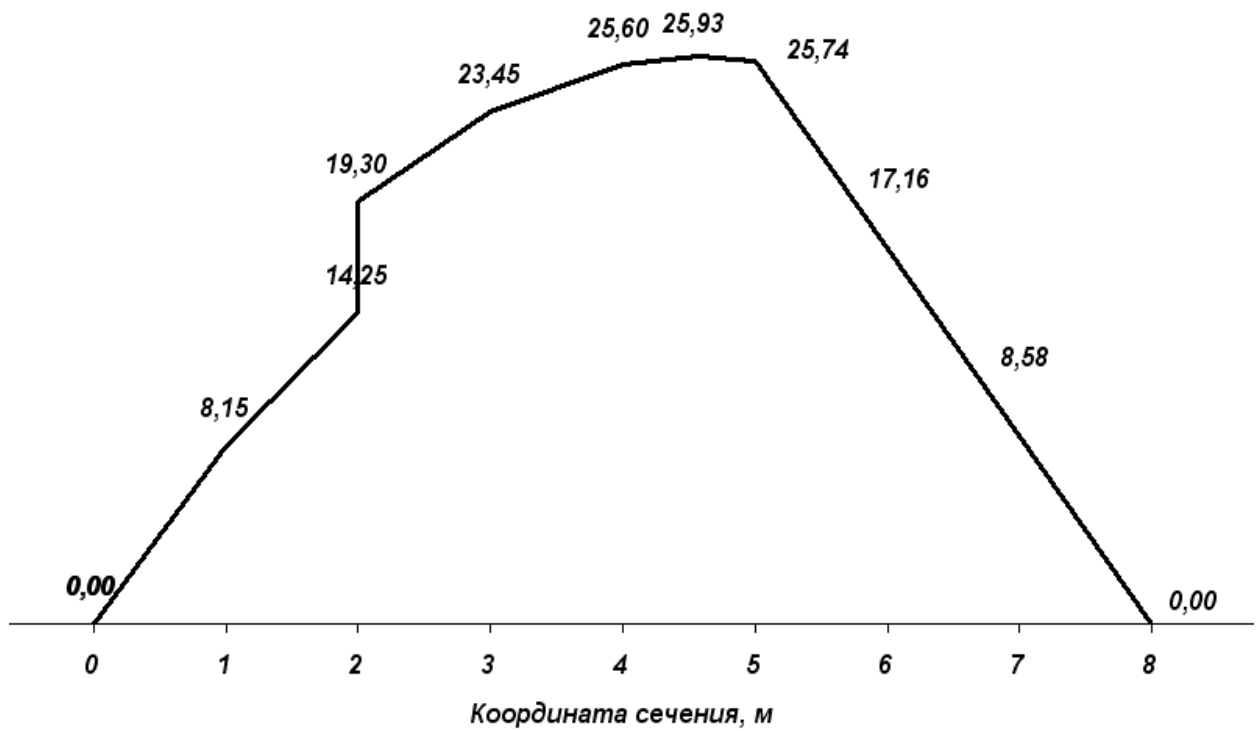
D5		=ЕСЛИ(B5<\$G\$5;0;ЕСЛИ(B5<\$G\$7;\$I\$5*B5-СТЕПЕНЬ(B5;2)/2*\$I\$6;ЕСЛИ(B5<\$G\$8;\$I\$5*B5-СТЕПЕНЬ(B5;2)/2*\$I\$6+\$I\$7;ЕСЛИ(B5<\$G\$9;\$I\$9*(G\$9-B5);0))))											
3	A	B	NN пп	Координата сечения, м	Величина перерезывающей силы, кН	Величина изгибающего момента, кНм	Вид нагрузки	Координата сечения приложения нагрузки		Величина нагрузки			
								начало	конец				
4													
5	0	-0,010	0,00	0,00	сн	0			9,15				
6	1	0,000	9,15	0,00	рн	0	5		2,00				
7	2	1,000	7,15	8,15	см	2			5,00				
8	3	1,990	5,17	14,25	сн	5			7,73				
9	4	2,000	5,15	19,30	сн	8			8,58				
10	5	3,000	3,15	23,45									
11	6	4,000	1,15	25,60									
12	6'	4,575	0,00	25,93	Координата сечения с экстремальным значением изгибающего момента		4,575						
13	7	4,995	-0,84	25,75									
14	8	5,000	-8,58	25,74									
15	9	6,000	-8,58	17,16									
16	10	7,000	-8,58	8,58									
17	11	7,990	-8,58	0,09									
18	12	8,000	0,00	0,00									

По данным столбцов **B** и **C** строится эпюра перерезывающих сил.
По данным столбцов **B** и **D** строится эпюра изгибающих моментов.

Эюра перерезывающих сил, кН



Эюра изгибающих моментов, кНм



4.4. Внутренние силовые факторы при совместной деформации изгиба и кручения

При действии системы внешних силовых воздействий валы редукторов и трансмиссий ременных передач испытывают совместные деформации изгиба и кручения. При этом, как правило, плоскости действия сил, вызывающих изгиб расположены в различных плоскостях.

В этом случае по поперечным сечениям вала реализуются внутренние силовые факторы: крутящий момент и изгибающий момент. Так как внешние силы действуют в различных плоскостях, то изгибающий момент рекомендуется определять в двух взаимно перпендикулярных плоскостях M_{X0Z} и M_{Y0Z} с учетом проекций внешних сил в этих плоскостях.

Общее напряженное состояние вала в этом случае определяется суммарным напряженным изгибающим моментом

$$M_{СУМ} = \sqrt{M_{X0Z}^2 + M_{Y0Z}^2}$$

и приведенным моментом, учитывающим касательные напряжения (крутящий момент) по одной из теорий прочности, чаще всего по условию

$$M_{ПР} = \sqrt{M_{СУМ}^2 + M_{КР}^2}.$$

Порядок выполнения расчетов для построения эпюр внутренних силовых факторов при совместном действии изгиба и кручения рекомендуется следующим:

- строится эпюра крутящих моментов (см. пункт 3.2.);
- определяются опорные реакции (см. пункт 2.1.4.);
- определяются изгибающие моменты в принятых плоскостях действия составляющих внешних сил и строятся их эпюры (3.3.);
- определяются суммарные и приведенные моменты и строятся их эпюры.

4.4.1. Пример расчета по определению внутренних силовых факторов при совместном действии изгиба и кручения

Определить напряженное состояние вала трансмиссии

Исходные данные:

Угловая скорость вращения вала – $\omega = 20$ рад/с.

Мощность, передаваемая на вал ведущим шкивом – $N_1 = 50$ кВт.

Мощности, снимаемые ведомыми шкивами:

$N_2 = 15$ кВт, $N_3 = 20$ кВт, $N_4 = 15$ кВт.

Диаметры шкивов:

ведущего – $D_1 = 0,5$ м,

ведомых – $D_2 = D_3 = D_4 = 0,375$ м.

Общая длина вала – $l = 3$ м.

Расстояния от левого подшипника до сечений крепления шкивов:

ведущего – $a_1 = 1,5$ м,

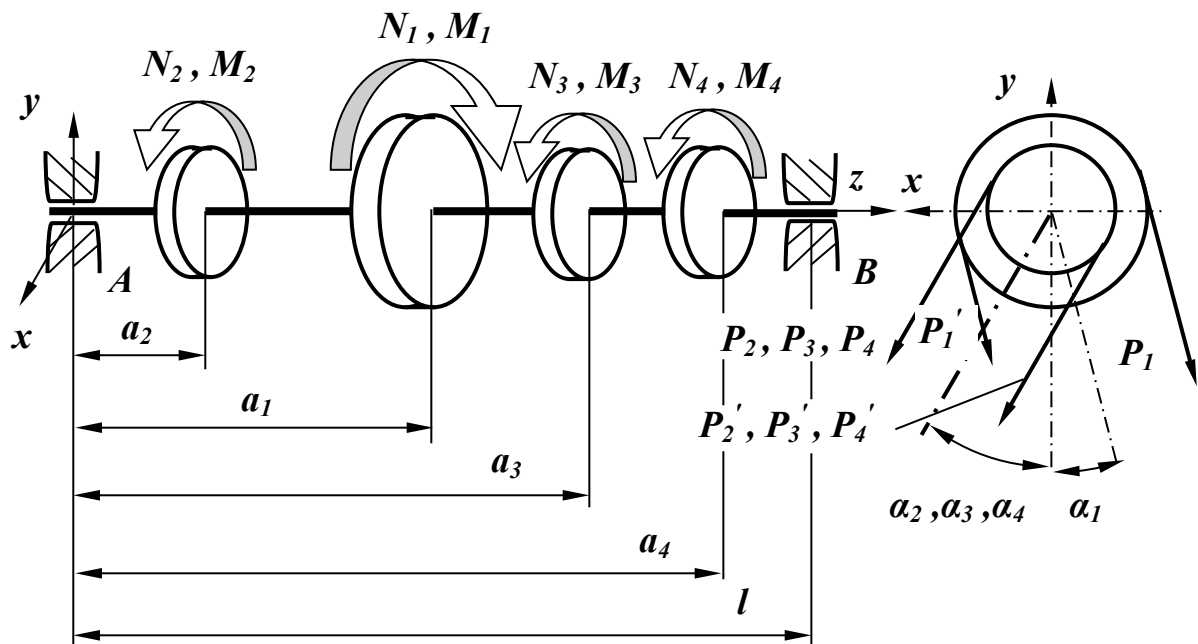
ведомых: $a_2 = 0,5$ м, $a_3 = 2$ м, $a_4 = 2,5$ м.

Углы наклона ветвей ременной передачи с вертикальной осью:

для ведущего шкива – $\alpha_1 = 10^\circ$,

для ведомых шкивов – $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 20^\circ$.

Схема нагрузки



Решение:

Определяются внешние силовые факторы, действующие на вал трансмиссии:

вращающие моменты на шкивах

$$M_{BPi} = N_i / \omega,$$

окружные усилия

$$P_{OKi} = M_{BPi} / D_i,$$

радиальные усилия

$$P_{Ri} = P_i + P'_i,$$

где P_i – усилие в ведомой ветви, обычно $P_i = P_{OKi}$,

P'_i – усилие в ведущей ветви, $P'_i = P_i + P_{OKi}$.

Расчеты рекомендуется выполнять в таблице следующего вида

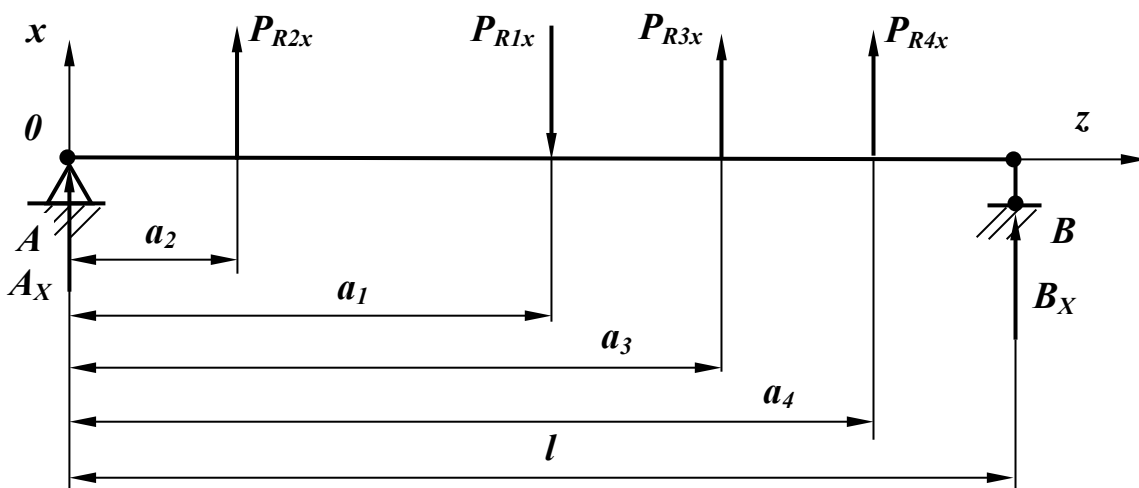
Внешние силовые факторы										
№ шкива	Мощность N_i , кВт	Угловая скорость ω , рад/с	Вращающий момент M_{BPI} , кНм	Диаметр шкива D_i , м	Окружное усилие P_{OKi} , кН	Радиальное усилие P_{Ri} , кН	Проекция радиального усилия на оси координат, кН			
							Угол с вертикальной осью, градус	Проекция на ось X	Проекция на ось Y	
1	50	20	2,500	0,500	5,000	15,000	170	-2,605	-14,772	
2	15	20	0,750	0,375	2,000	6,000	200	2,052	-5,638	
3	20	20	1,000	0,375	2,667	8,000	200	2,736	-7,518	
4	15	20	0,750	0,375	2,000	6,000	200	2,052	-5,638	

Определяются опорные реакции в подшипниках трансмиссионного вала. Так как линии действия радиальных усилий на вал находятся в разных плоскостях, опорные реакции в подшипниках определяются их составляющими в плоскостях проекций XOZ и YOZ .

Общий порядок определения опорных реакций приведен в пункте 2.1.4. В рассматриваемом случае порядок решения и вид расчетных таблиц ввиду того, что внешние нагрузки только сосредоточенные и линии их действия перпендикулярны продольной оси Z , значительно упрощаются.

В плоскости XOZ :

Силовая схема

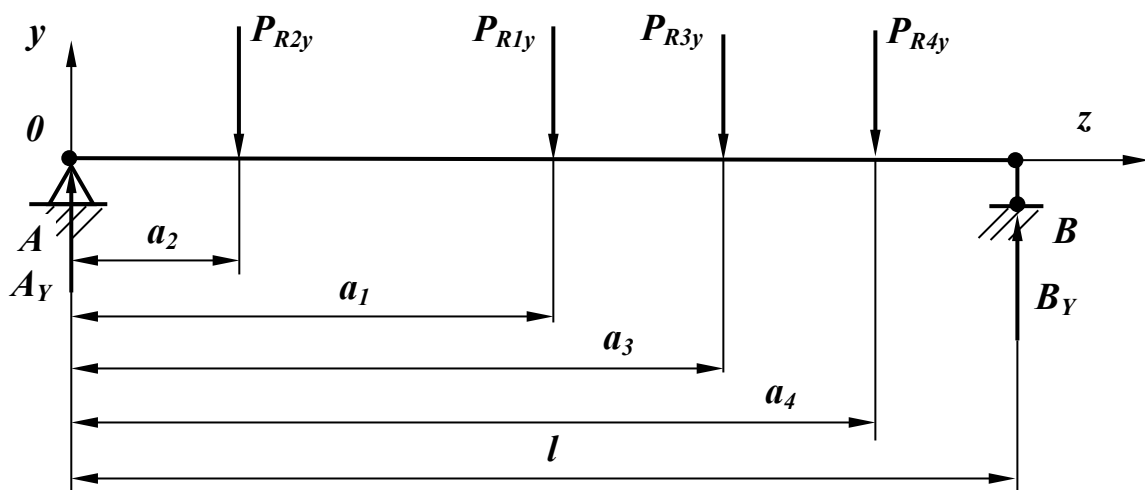


Расчетная таблица и полученные результаты показаны ниже (показана формула определения моментов относительно опоры B).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Обозначение нагрузки	Величина нагрузки, кН	Координата сечения приложения нагрузки, м	Момент относительно первой расчетной точки	Момент относительно второй расчетной точки						
2	A_x	найти	0,000	0,000	-3,000		0,000	-3,000			
3	B_x	найти	3,000	3,000	0,000		3,000	0,000			
4	P_{R2x}	2,052	0,500	1,026	-5,130						
5	P_{R1x}	2,605	1,500	-3,908	3,908		7,721	-4,985		$A_x =$	-1,662
6	P_{R3x}	2,736	2,000	5,472	-2,736		3,000	0,000			
7	P_{R4x}	2,052	2,500	5,130	-1,026						
8	Сумма действия активных нагрузок			7,721	-4,985		0,000	-3,000		$B_x =$	-2,574
9	Координаты первого расчетного сечения определения моментов				0,000		7,721	-4,985			
10	Координаты второго расчетного сечения определения моментов				3,000						

В плоскости YOZ :

Силовая схема

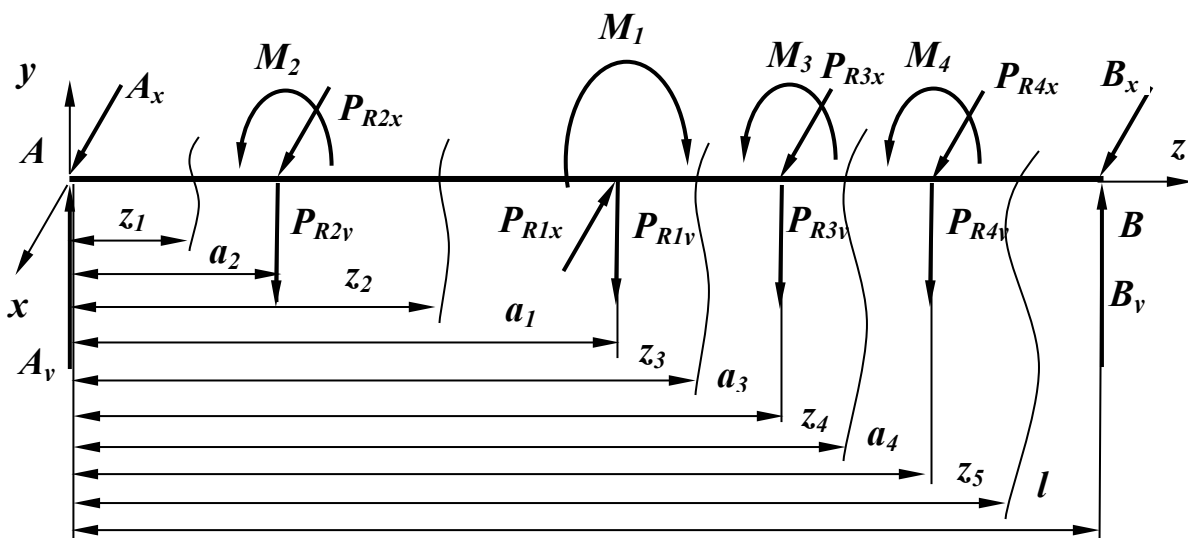


Расчетная таблица и полученные результаты показаны ниже (показана формула определения моментов относительно опоры A).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Обозначение нагрузки	Величина нагрузки, кН	Координата сечения приложения нагрузки, м	Момент относительно первой расчетной точки	Момент относительно второй расчетной точки						
1											
2	A_x	найти	0,000	0,000	-3,000		0,000	-3,000			
3	B_x	найти	3,000	3,000	0,000		3,000	0,000			
4	P_{R2x}	5,638	0,500	-2,819	14,095						
5	P_{R1x}	14,772	1,500	-22,158	22,158		-54,108	46,590		$A_y =$	15,530
6	P_{R3x}	7,518	2,000	-15,036	7,518		3,000	0,000			
7	P_{R4x}	5,638	2,500	-14,095	2,819						
8	Сумма действия активных нагрузок			-54,108	46,590		0,000	-3,000		$B_y =$	18,036
9	Координаты первого расчетного сечения определения моментов				0,000		-54,108	46,590			
10	Координаты второго расчетного сечения определения моментов				3,000						

Выполняются расчеты по определению внутренних силовых факторов по длине вала трансмиссии. Порядок определения приведен в пунктах 3.2 и 3.3. В рассматриваемом случае расчеты по определению крутящего момента и изгибающих моментов в плоскостях проекций можно выполнить в одной расчетной таблице.

Схема внешних нагрузок

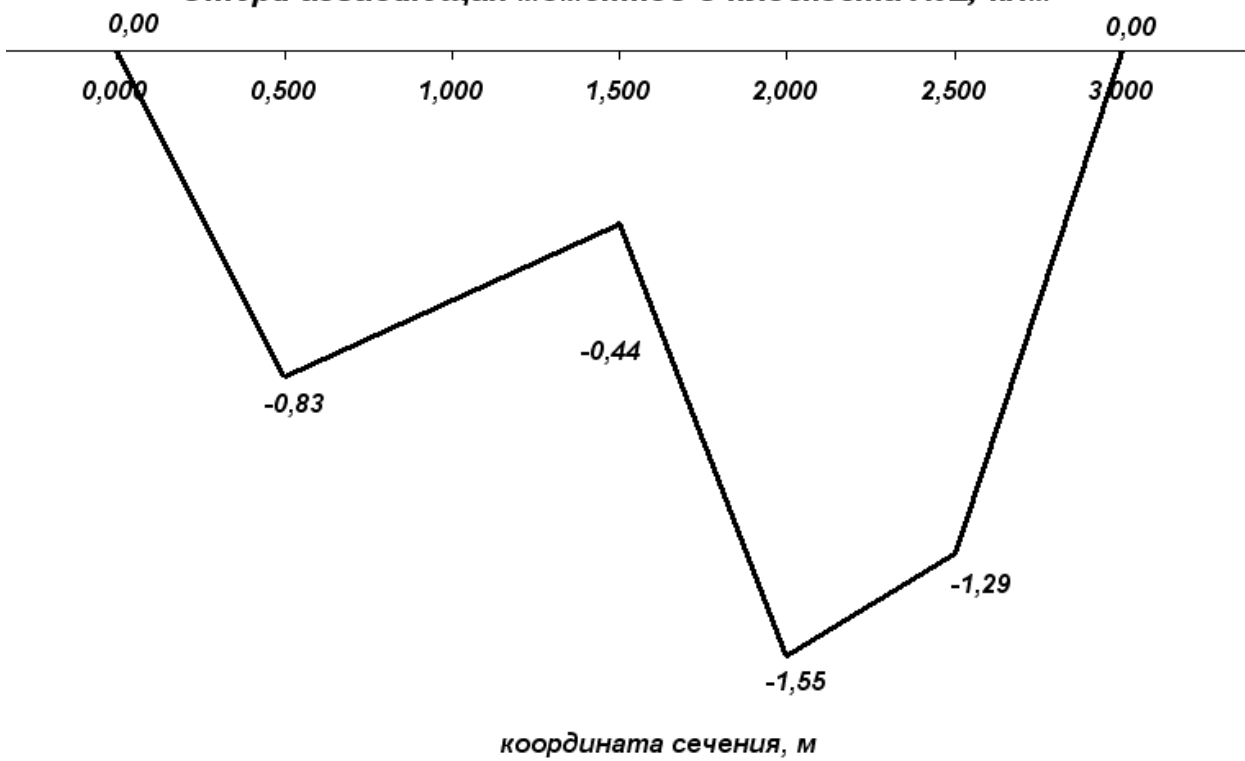


Расчетная таблица, полученные результаты определения внутренних силовых факторов и эпюры их показаны ниже (показана формула определения приведенных моментов).

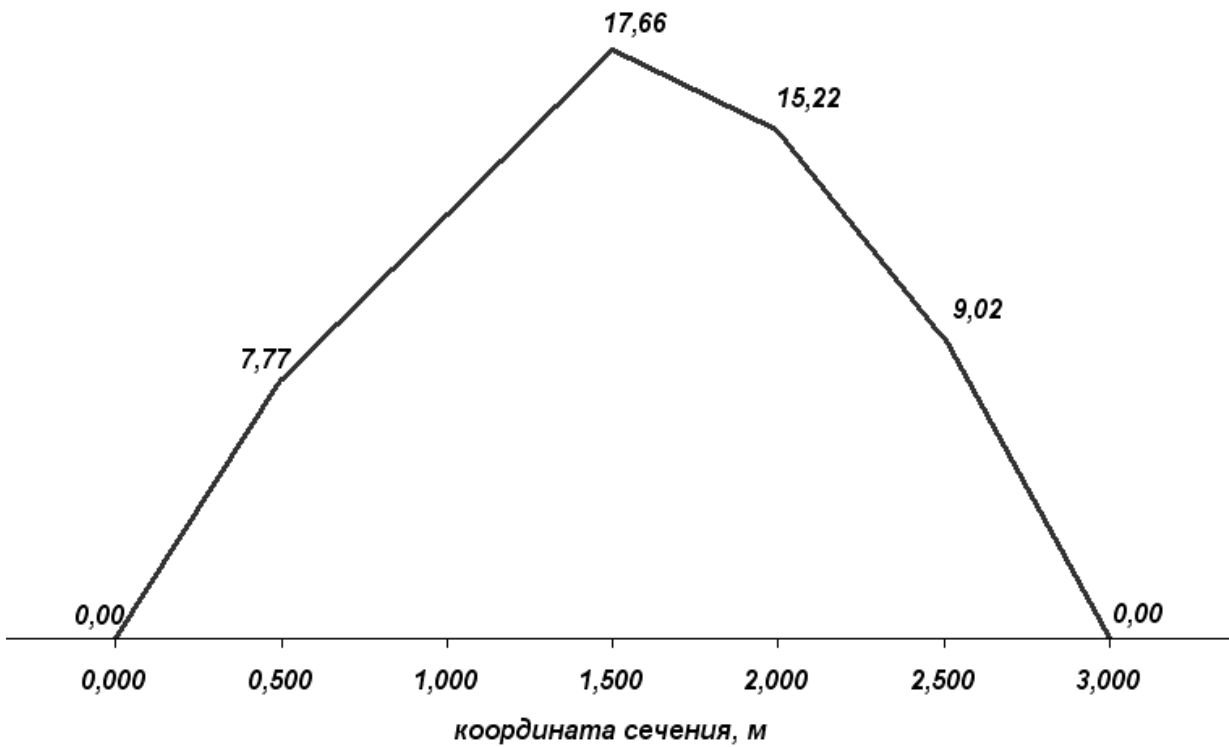
		F5 = =КОРЕНЬ(СТЕПЕНЬ(B5;2)+СТЕПЕНЬ(E5;2))									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Расчетная таблица						Исходные данные				
2	Координата сечения, м	Величина крутящего момента, кНм	Величина изгибающего момента, кНм			Приведенный момент, кНм	Координата сечения приложения нагрузки, м	Величина внешних силовых факторов			
3			В плоскости X0Z	В плоскости Y0Z	Суммарного			Вращающий момент, кНм	Сосредоточенные нагрузки в плоскости X0Z	Сосредоточенные нагрузки в плоскости Y0Z	
4											
5	-0,005	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,000	-1,662	15,530	
6	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,5	0,750	2,052	5,638	
7	0,495	0,00	-0,82	7,69	7,73	7,73	1,5	2,500	2,605	14,772	
8	0,500	-0,75	-0,83	7,77	7,81	7,85	2,0	1,000	2,736	7,518	
9	1,495	-0,75	-0,44	17,61	17,61	17,63	2,5	0,750	2,052	5,638	
10	1,500	1,75	-0,44	17,66	17,66	17,75	3	0,000	-2,574	18,036	
11	1,995	1,75	-1,54	15,24	15,32	15,42					
12	2,000	0,75	-1,55	15,22	15,30	15,31					
13	2,495	0,75	-1,29	9,08	9,17	9,20					
14	2,500	0,00	-1,29	9,02	9,11	9,11					
15	2,995	0,00	-0,01	0,09	0,09	0,09					
16	3,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00					
17	3,005	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00					



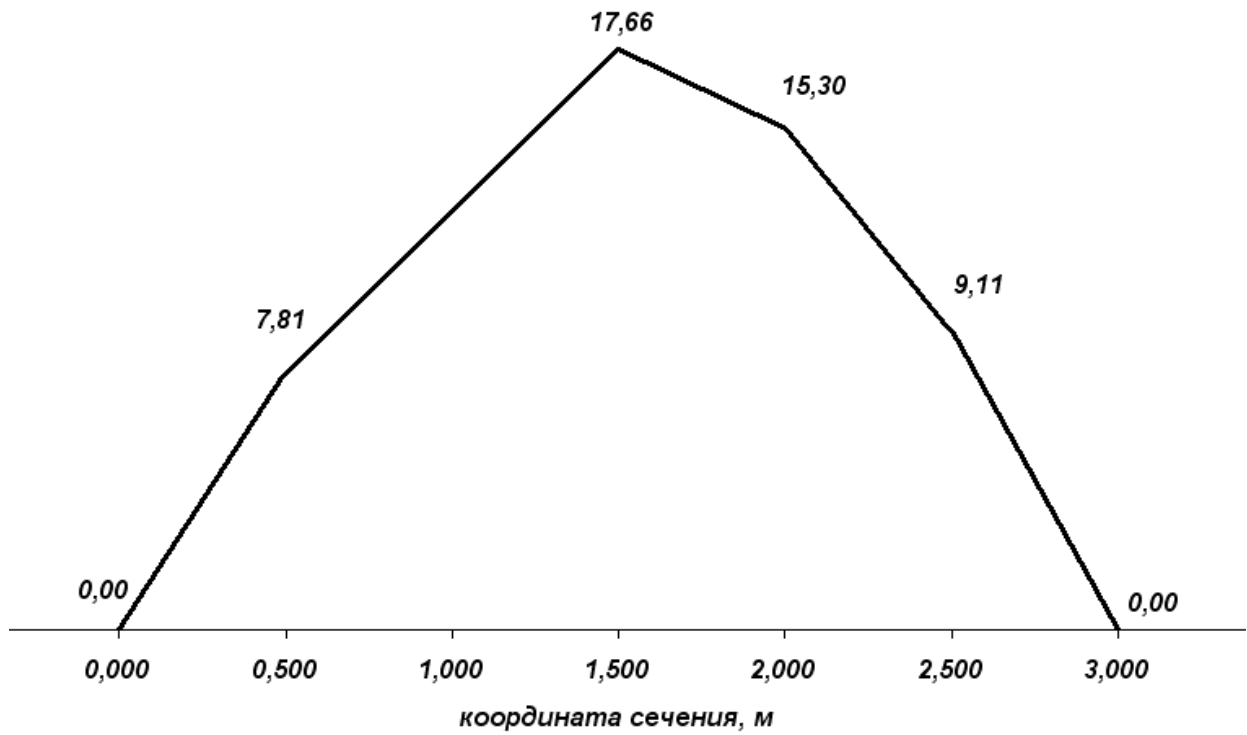
Эпюра изгибающих моментов в плоскости X0Z, кНм



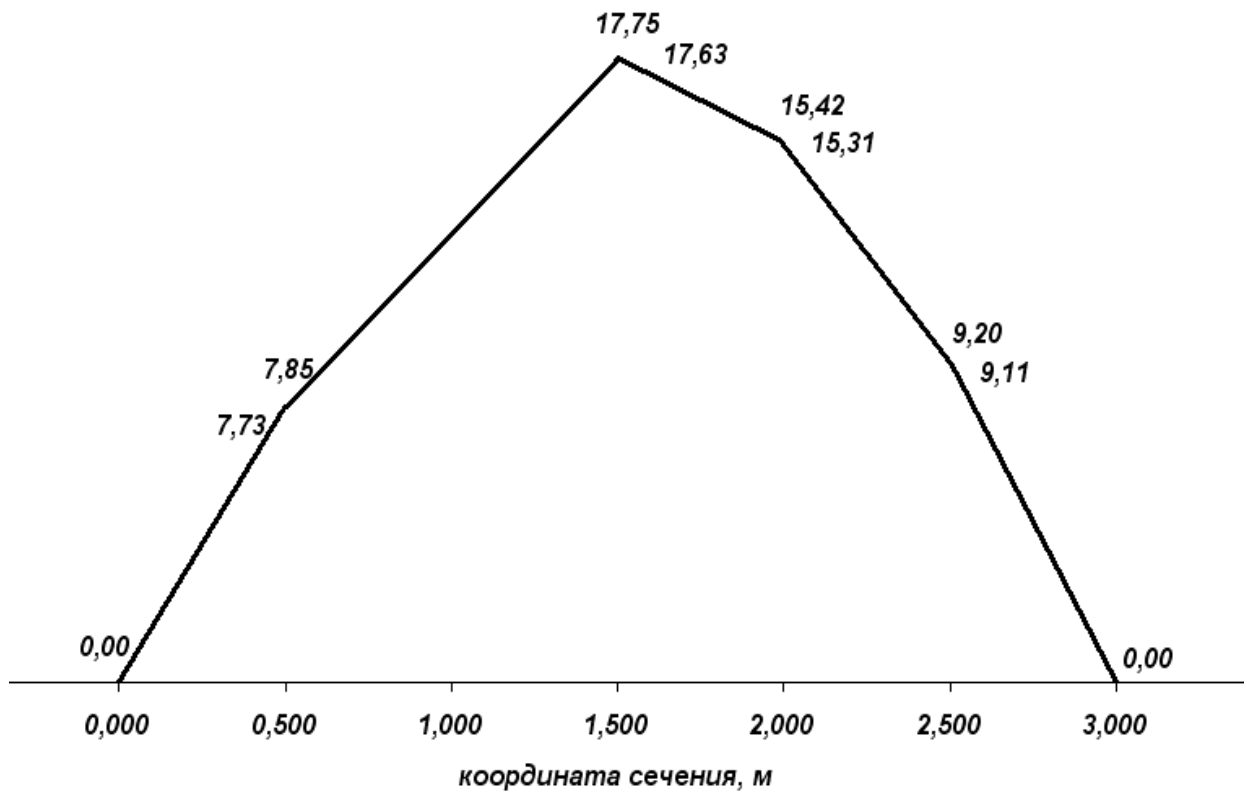
Эпюра изгибающих моментов в плоскости Y0Z, кНм



Эпюра суммарных изгибающих моментов, кНм



Эпюра приведенных моментов, кНм



3. 5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

В дисциплине « Теория механизмов и машин» одной из основополагающих задач является кинематический анализ механизма. При кинематическом анализе оцениваются: перемещения, скорости и ускорения точек звеньев механизма при изменении их взаимного положения.

Звенья механизмов совершают сложное движение. В этом случае кинематические параметры движения точек звеньев определяются геометрической суммой составляющих их в абсолютном движении звена вместе с полюсом и относительном движении точек звена относительно полюса.

В абсолютном числе случаев звенья механизмов совершают плоскопараллельное движение.

5.1. Кинематические параметры движения точек звеньев механизма при плоскопараллельном движении

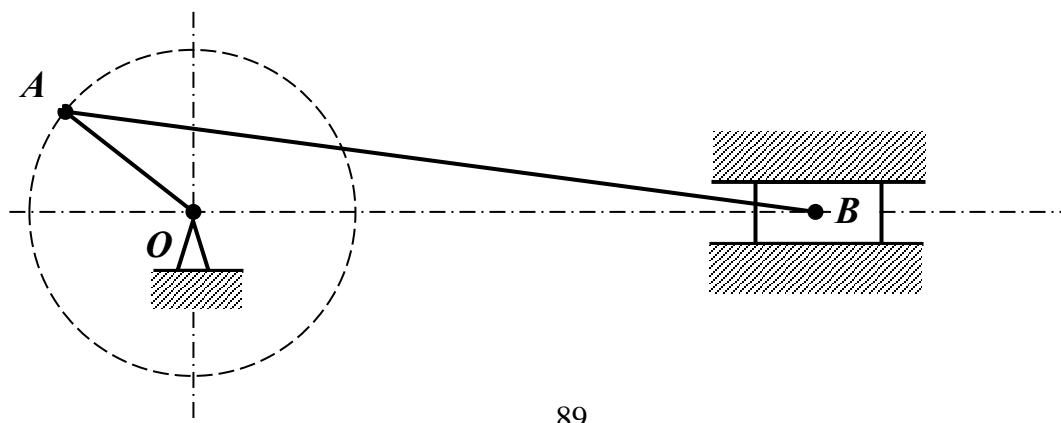
При плоскопараллельном движении любого тела кинематические параметры движения определяются геометрической (векторной) суммой соответствующих параметров движения в переносном движении вместе с полюсом и относительном движении по отношению к полюсу.

Графическое решение всегда сопровождается относительной степенью неточности, связанной с выбором масштаба изображения (объективная погрешность) и наличием надлежащего опыта графического отображения (субъективная) погрешность.

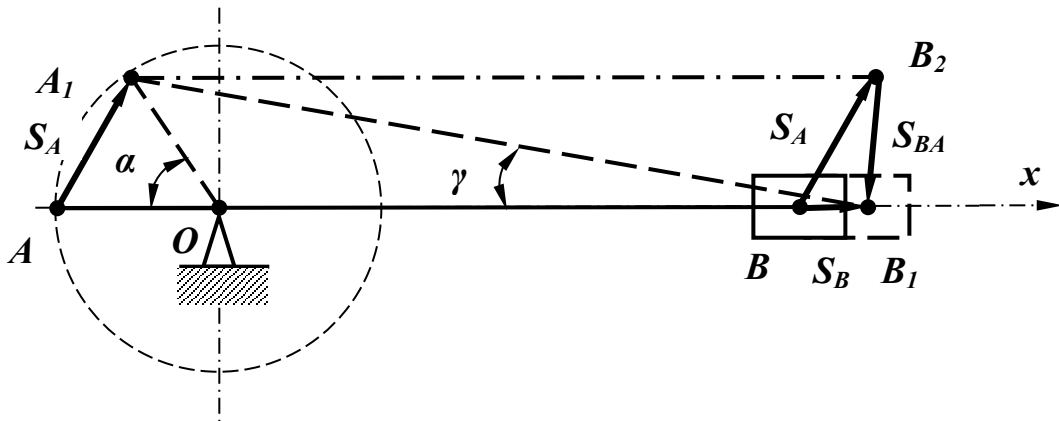
Аналитическое решение в проекциях на координатные оси связано с необходимостью выполнения достаточно трудоемких многовариантных расчетов, выполнение которых значительно упрощается в табличном процессоре *Excel*.

5.2. Определение кинематических параметров движения для четырехзвенного механизма

Одним из классических вариантов четырехзвенного механизма является распространенный кривошипно-шатунный механизм.



Величина абсолютного перемещения точки B определяется перемещением точки (полюса) A и относительным перемещением точки B по отношению к полюсу A .



В векторном виде абсолютное перемещение точки B определяется условием:

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A + \vec{S}_{BA}.$$

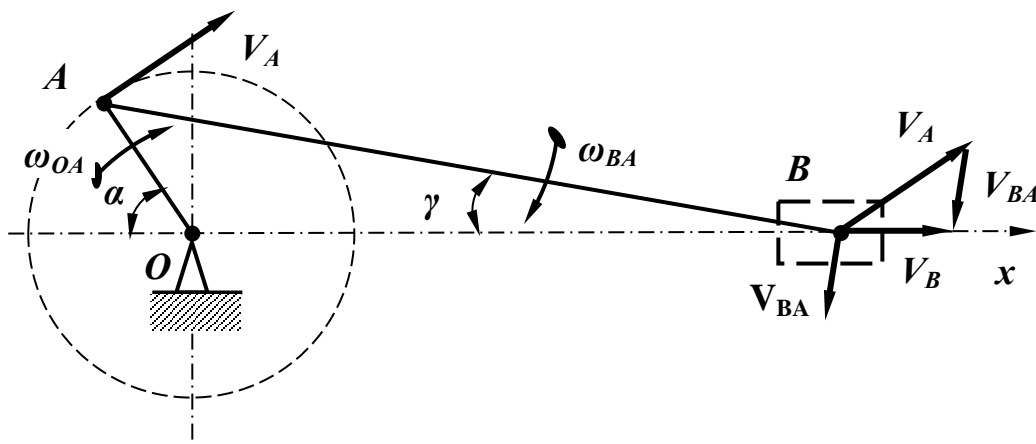
Ввиду того, что абсолютное перемещение точки B (BB_1) определяется направляющими ползуна, модуль и направление этого перемещения можно определить либо проектированием контура BB_2B_1 на ось x , либо проектированием контуров OAB и OA_1B_1 на ту же ось x :

$$BB_1 = S_B = OA \cdot (1 - \cos \alpha) - AB \cdot (1 - \cos \gamma),$$

где γ – угол между направлением шатуна AB и отрицательным направлением оси x :

$$\sin \gamma = \frac{OA}{AB} \cdot \sin \alpha.$$

Величина абсолютной скорости точки B определяется скоростью точки (полюса) A и относительной скорости во вращательном движении точки B относительно полюса.



В векторной форме абсолютная скорость точки B определяется условием:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

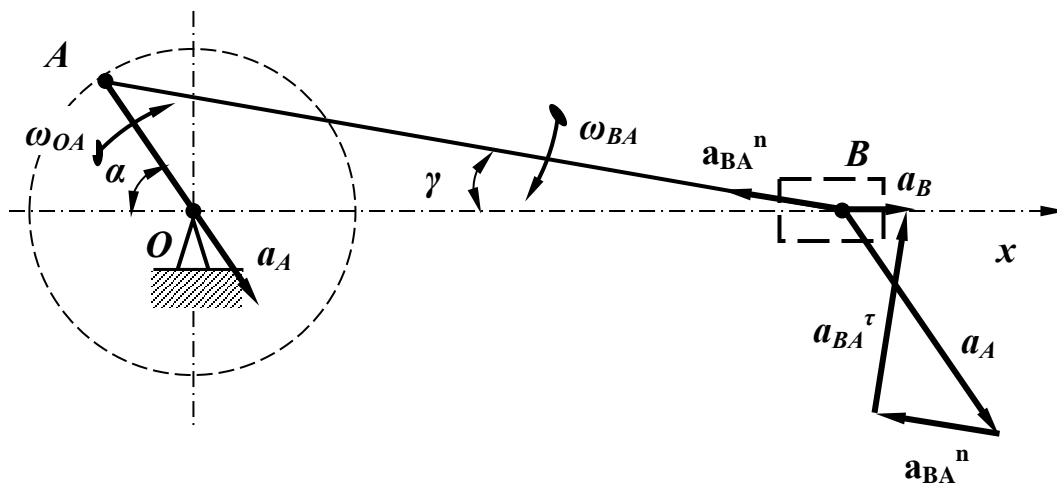
Абсолютная скорость точки B направлена по направлению движения ползуна. Поэтому модуль и знак абсолютной скорости можно определить из условия

$$V_B = V_{Bx} = V_A \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - V_A \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Скорость точки B в относительном движении по отношению к полюсу A определяется в этом случае условием

$$V_{BA} = V_A \cdot \sin(90^\circ - \alpha) / \cos(\gamma).$$

Величина абсолютного ускорения точки B определяется ускорением точки (полюса) A и ускорением во вращательном движении точки B относительно полюса.



В векторной форме абсолютное ускорение точки B определяется условием:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}; \quad \vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau; \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

При постоянной угловой скорости $\vec{a}_A^\tau = \mathbf{0}$, тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Аналитически абсолютная скорость точки B определяется условием

$$a_B = a_A^n \cdot \cos \alpha - a_{BA}^n \cdot \cos \gamma + \left| a_A^n \cdot \sin \alpha - a_{BA}^n \cdot \sin \gamma \right| \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

где a_A^n – центростремительная составляющая ускорения точки A – $a_A^n = V_A^2 / OA$;

a_{BA}^n – центростремительная составляющая ускорения точки B во вращательном движении относительно полюса A – $a_{BA}^n = V_{BA}^2 / BA$.

5.2.1. Пример определения кинематических параметров движения для кривошипно-шатунного механизма

Исходные данные:

Угловая скорость вращения кривошипа – $\omega = 5$ рад/с.

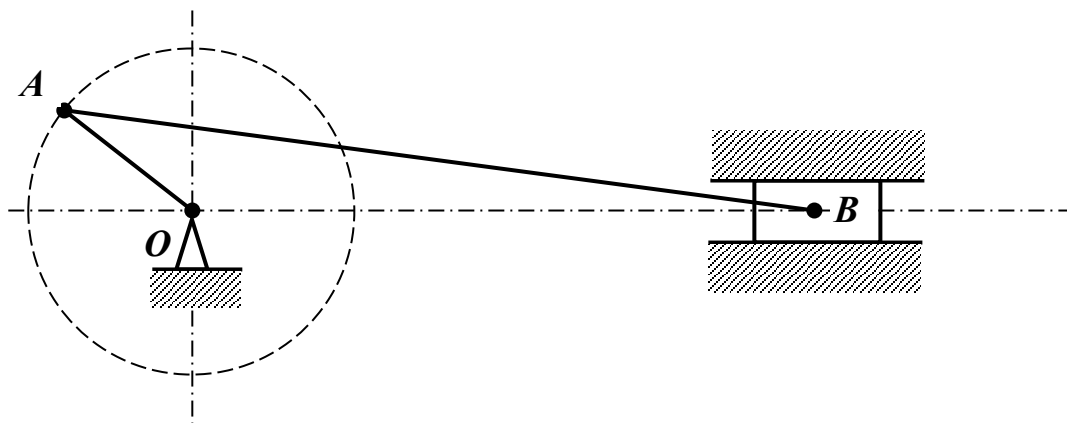
Размеры звеньев механизма:

длина кривошипа – $a = OA = 0,3$ м;

длина шатуна $a - b = 1,1$ м.

Диапазон изменения углов поворота кривошипа от θ до 360 градусов.

Схема механизма



Решение:

Для выполнения кинематического анализа рассматриваемого механизма рекомендуется расчетная таблица следующего вида (табл. 10).

Таблица 10

Расчетная таблица определения кинематических параметров кривошипно-шатунного механизма

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Угол A	Угол G	Перемещение	Скорость B	Скорость BA	Угловая скорость BA	Центростремительное ускорение A (модуль)	Центростремительное ускорение BA (модуль)	Ускорение B
1									
2									
3									
4									

Порядок решения:

В расчетную таблицу вносятся исходные данные и расчетный диапазон угла поворота кривошипа.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Угол A	Угол G	Перемещение	Скорость B	Скорость BA	Угловая скорость BA	Центробежное ускорение A (модуль)	Центробежное ускорение BA (модуль)	Ускорение B			
1												
2	0										a =	0,3
3	30										b =	1,1
4	60										w =	5
5	90										v =	1,5
6	120											
7	150											
8	180											
9	210											
10	240											
11	270											
12	300											
13	330											
14	360											
15												

В первую расчетную ячейку столбца **B** (**B2**) вводится формула определения угла отклонения шатуна γ

$$\Rightarrow \text{ASIN}(\$L\$2 * \text{SIN}(\text{РАДИАНЫ}(A2)) / \$L\$3)$$

Автозаполнением определяется величина этого угла для всего диапазона изменения угла поворота кривошипа.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Угол A	Угол G	Перемещение	Скорость B	Скорость BA	Угловая скорость BA	Центробежное ускорение A (модуль)	Центробежное ускорение BA (модуль)	Ускорение B			
1												
2	0	0,00000									a =	0,3
3	30	0,13679									b =	1,1
4	60	0,23844									w =	5
5	90	0,27623									v =	1,5
6	120	0,23844										
7	150	0,13679										
8	180	0,00000										
9	210	-0,13679										
10	240	-0,23844										
11	270	-0,27623										
12	300	-0,23844										
13	330	-0,13679										
14	360	0,00000										
15												

В первую расчетную ячейку столбца **C** (**C2**) вводится формула определения перемещения ползуна **B**.

$$\Rightarrow \$L\$2*(1-COS(РАДИАНЫ(A2)))-\$L\$3*(1-COS(B2)).$$

Автозаполнением определяется величина перемещения ползуна для всего диапазона изменения угла поворота кривошипа.

C2												
= =\\$L\$2*(1-COS(РАДИАНЫ(A2)))-\\$L\$3*(1-COS(B2))												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Угол A	Угол G	Перемещение	Скорость B	Скорость BA	Угловая скорость BA	Центробежное ускорение A (модуль)	Центробежное ускорение BA (модуль)	Ускорение B			
1												
2	0	0,00000	0,0000								a =	0,3
3	30	0,13679	0,0299								b =	1,1
4	60	0,23844	0,1189								w =	5
5	90	0,27623	0,2583								v =	1,5
6	120	0,23844	0,4189									
7	150	0,13679	0,5495									
8	180	0,00000	0,6000									
9	210	-0,13679	0,5495									
10	240	-0,23844	0,4189									
11	270	-0,27623	0,2583									
12	300	-0,23844	0,1189									
13	330	-0,13679	0,0299									
14	360	0,00000	0,0000									
15												

В первую расчетную ячейку столбца **D** (**D2**) вводится формула определения скорости перемещения ползуна.

$$\Rightarrow \$L\$5*COS(РАДИАНЫ(90-A2))-\$L\$5*SIN(РАДИАНЫ(90-A2))*TAN(B2)$$

Автозаполнением определяется величина скорости перемещения ползуна для всего диапазона изменения угла поворота кривошипа.

D2												
= =\\$L\$5*COS(РАДИАНЫ(90-A2))-\\$L\$5*SIN(РАДИАНЫ(90-A2))*TAN(B2)												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Угол A	Угол G	Перемещение	Скорость B	Скорость BA	Угловая скорость BA	Центробежное ускорение A (модуль)	Центробежное ускорение BA (модуль)	Ускорение B			
1												
2	0	0,00000	0,0000	0,0000							a =	0,3
3	30	0,13679	0,0299	0,5712							b =	1,1
4	60	0,23844	0,1189	1,1167							w =	5
5	90	0,27623	0,2583	1,5000							v =	1,5
6	120	0,23844	0,4189	1,4813								
7	150	0,13679	0,5495	0,9288								
8	180	0,00000	0,6000	0,0000								
9	210	-0,13679	0,5495	-0,9288								
10	240	-0,23844	0,4189	-1,4813								
11	270	-0,27623	0,2583	-1,5000								
12	300	-0,23844	0,1189	-1,1167								
13	330	-0,13679	0,0299	-0,5712								
14	360	0,00000	0,0000	0,0000								
15												

В первые расчетные ячейки столбцов *E*, *F*, *G*, *H* вводятся формулы для определения:

в ячейку *E2* – линейной скорости точки *B* во вращательном движении относительно полюса *A*:

$$\Rightarrow \text{=}\$L\$5*(\text{SIN}(\text{РАДИАНЫ}(90\text{-}A2)))/\text{COS}(B2);$$

в ячейку *F2* – угловой скорости шатуна *BA*:

$$\Rightarrow E2/\$L\$3;$$

в ячейку *G2* – нормального ускорения точки *A* кривошипа:

$$\Rightarrow \text{СТЕПЕНЬ}(\$L\$5;2)/\$L\$2;$$

в ячейку *H2* – нормальное ускорение точки *B* во вращательном движении относительно полюса *A*:

$$\Rightarrow \text{СТЕПЕНЬ}(F2;2)*\$L\$3.$$

Автозаполнением определяются величины выше перечисленных параметров для всего диапазона изменения углов поворота кривошипа.

В первую расчетную ячейку столбца *I* (*I2*) вводится формула определения абсолютного ускорения точки *B*:

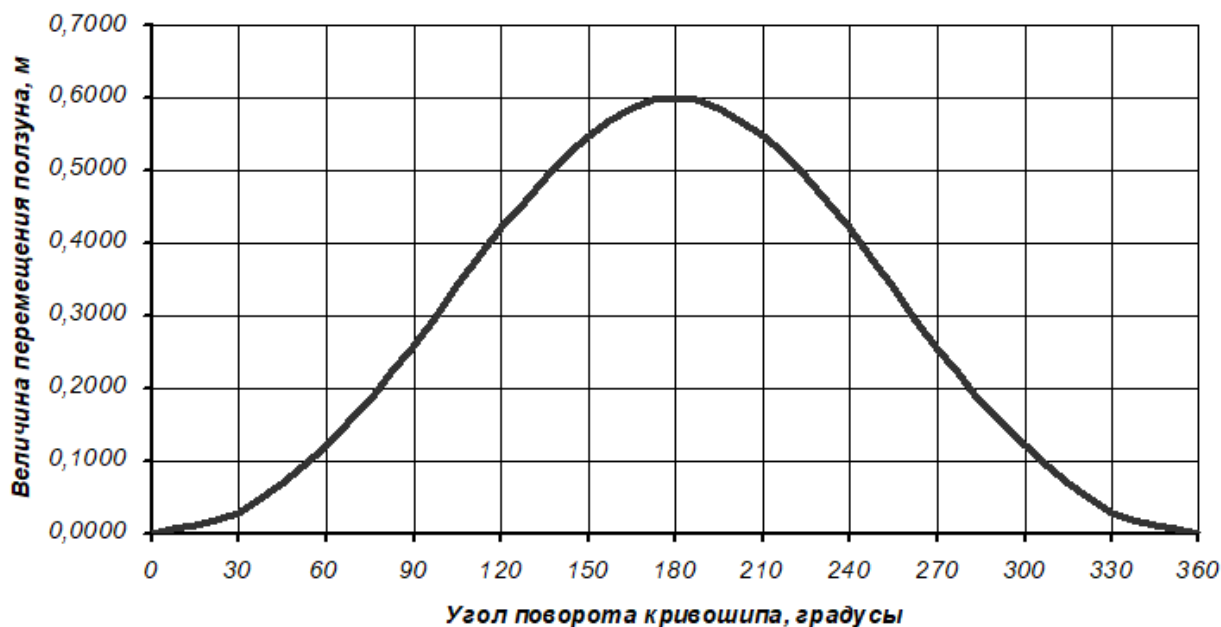
⇒

Автозаполнением определяется величина абсолютного ускорения точки *B*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Угол A	Угол G	Перемещение	Скорость B	Скорость BA	Угловая скорость BA	Центробежное ускорение A (модуль)	Центробежное ускорение BA (модуль)	Ускорение B			
1												
2	0	0,00000	0,0000	0,0000	1,5000	1,3636	7,5000	2,0455	5,4545		a =	0,3
3	30	0,13679	0,0299	0,5712	1,3113	1,1921	7,5000	1,5632	5,4335		b =	1,1
4	60	0,23844	0,1189	1,1167	0,7718	0,7017	7,5000	0,5416	4,7714		w =	5
5	90	0,27623	0,2583	1,5000	0,0000	0,0000	7,5000	0,0000	2,1261		v =	1,5
6	120	0,23844	0,4189	1,4813	-0,7718	-0,7017	7,5000	0,5416	-2,7286			
7	150	0,13679	0,5495	0,9288	-1,3113	-1,1921	7,5000	1,5632	-7,5569			
8	180	0,00000	0,6000	0,0000	-1,5000	-1,3636	7,5000	2,0455	-9,5455			
9	210	-0,13679	0,5495	-0,9288	-1,3113	-1,1921	7,5000	1,5632	-7,5569			
10	240	-0,23844	0,4189	-1,4813	-0,7718	-0,7017	7,5000	0,5416	-2,7286			
11	270	-0,27623	0,2583	-1,5000	0,0000	0,0000	7,5000	0,0000	2,1261			
12	300	-0,23844	0,1189	-1,1167	0,7718	0,7017	7,5000	0,5416	4,7714			
13	330	-0,13679	0,0299	-0,5712	1,3113	1,1921	7,5000	1,5632	5,4335			
14	360	0,00000	0,0000	0,0000	1,5000	1,3636	7,5000	2,0455	5,4545			
15												

По результатам расчетов в *Мастере Диаграмм* можно построить графики изменения перемещения, скорости и ускорения ползуна *B* в зависимости от угла поворота кривошипа.

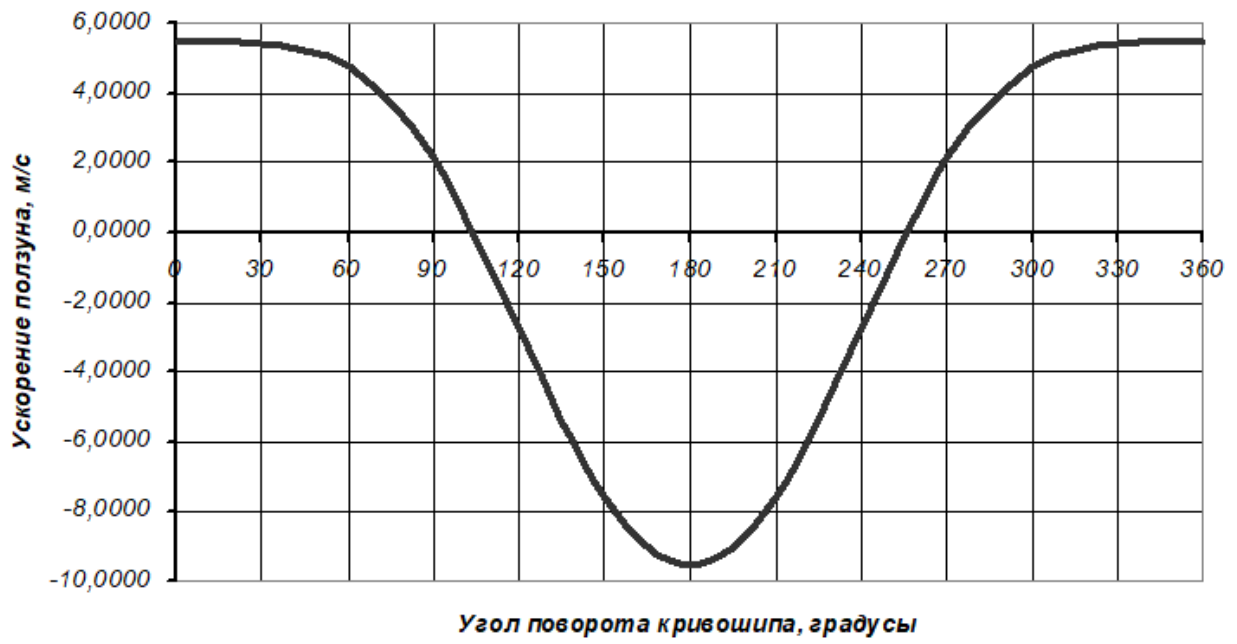
Перемещение ползуна, м



Скорость движения ползуна



Абсолютное ускорение ползуна



ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кирсанов М. Н. Решения задач по теоретической механике: учебное пособие. – 2-е изд., доп. – М.: ИНФРА-М, 2022. – 222 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1864120>. – Режим доступа: по подписке.

2. Белов М. И. Теоретическая механика: учебное пособие / М.И. Белов, Б.В. Пылаев. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2022. – 335 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1846427>. – Режим доступа: по подписке.

3. Цывилевский В. Л. Теоретическая механика: учебник. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2023. – 368 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1941737>. – Режим доступа: по подписке.

4. Салахутдинов Ш.А. Сопротивление материалов: учебное пособие / Ш.А. Салахутдинов, С.А. Одинцова, Д.В. Шейкман. – М.; Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. – 192 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1902592>. – Режим доступа: по подписке.

5. Сидорин С.Г. Сопротивление материалов: теория, тестовые задания, примеры решения: учебное пособие / С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. – 2-е изд. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2023. – 191 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1843572>. – Режим доступа: по подписке.

6. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: учебное пособие / Н.М. Атаров. – М.: ИНФРА-М, 2023. – 407 с. – Текст : электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1914090>. – Режим доступа: по подписке.

СОДЕРЖАНИЕ

4. Введение.....	3
1. Табличный процессор Excel в расчетах.....	4
2. Реакции связей твердого тела	9
2.1. Общие положения равновесия	9
2.2. Реакции связей при плоской сходящейся системе сил	10
сходящейся системе сил	10
2.3. Реакции связей для пространственной системы сходящихся сил	15
2.4. Реакции связей для плоской произвольной системы сил	19
3. Центр тяжести и основные геометрические характеристики плоской фигуры (поперечного сечения элемента)	29
3.1. Центр тяжести плоской фигуры (сечения) и геометрические характеристики плоских фигур (сечений).....	29
3.2. Геометрические характеристики сечения, составленного из произвольных плоских фигур	32
3.3. Геометрические характеристики сечения, составленного из стандартных прокатных профилей	45
4. Внутренние силовые факторы в элементах конструкции механизмов, машин и технологического оборудования	57
4.1. Внутренние силовые факторы при продольных деформациях элемента конструкции (растяжение – сжатие).....	57
4.2. Внутренние силовые факторы при деформациях кручения элемента конструкции.....	61
4.3. Внутренние силовые факторы при плоском поперечном изгибе элемента конструкции	66
4.4. Внутренние силовые факторы при совместной деформации изгиба и кручения.....	79
5. Кинематический анализ плоского механизма.....	87
5.1. Кинематические параметры движения точек звеньев	87
5.2. Определение кинематических параметров движения для четырехзвенного механизма.....	87
Перечень литературных источников.....	96